Appendix F

Corrigés des exercices du chapitre 7

Exercice 7.1 La réflexivité $\tau <: \tau$ est immédiate par récurrence structurelle sur τ. Pour la transitivité ($\tau_1 <: \tau_2$ et $\tau_2 <: \tau_3$ implique $\tau_1 <: \tau_3$) on procède par récurrence structurelle sur τ_1, τ_2, τ_3 et par cas sur le constructeur de tête de ces trois types. On est forcément dans l'un des cas suivants:

τ_1	τ_2	τ_3	
T	T	T	On a bien $T <: T$ par axiome
α	α	α	Là aussi, $\alpha <: \alpha$ est un axiome
$\varphi_1 \to \psi_1$	$\varphi_2 \to \psi_2$	$\varphi_3 \to \psi_3$	On a $\varphi_3 <: \varphi_2$ et $\varphi_2 <: \varphi_1$ et $\psi_1 <: \psi_2$ et $\psi_2 <: \psi_3$. Par hypothèse de récurrence, $\varphi_3 <: \varphi_1$ et $\psi_1 <: \psi_3$. D'où $\varphi_1 \to \psi_1 <: \varphi_3 \to \psi_3$ par la règle de sous-typage des types flèche.
$\varphi_1 \times \psi_1$	$\varphi_2 \times \psi_2$	$\varphi_3 \times \psi_3$	Même raisonnement que pour les types flèche.
$\langle\varphi_1\rangle$	$\langle\varphi_2\rangle$	$\langle\varphi_3\rangle$	On a $\varphi_1 <: \varphi_2$ et $\varphi_2 <: \varphi_3$, d'où $\varphi_1 <: \varphi_3$ par hypothèse de récurrence, et $\langle\varphi_1\rangle <: \langle\varphi_3\rangle$ par la règle de sous-typage des types objets.
$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset <: \emptyset$ par axiome.
τ_1	$\emptyset$	$\emptyset$	$\tau_1 <: \emptyset$ par axiome.
τ_1	τ_2	$\emptyset$	$\tau_1 <: \emptyset$ par axiome.
$m : \varphi_1;\ \psi_1$	$m : \varphi_2;\ \psi_2$	$m : \varphi_3;\ \psi_3$	Même raisonnement que pour les types produit.

Enfin, pour l'antisymétrie ($\tau <: \tau'$ et $\tau' <: \tau$ impliquent $\tau = \tau'$), on raisonne par récurrence structurelle sur τ et τ'. Les cas où τ et τ' ont le même constructeur de tête sont immédiats par application de l'hypothèse de récurrence. Reste le cas $\tau' = \emptyset$ où $\tau <: \tau'$ est vrai pour tout τ. Cependant, on a aussi $\emptyset <: \tau$ et cela n'est possible que si $\tau = \emptyset$, d'où $\tau = \tau'$ comme désiré.

Exercice 7.2 Supposons $E \vdash (\texttt{fun}\ x \to a)\ v : \tau$. Une dérivation de ce typage est nécessairement de la forme suivante:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{E + \{x : \varphi_1\} \vdash a : \tau_1}{E \vdash \texttt{fun}\ x \to a : \varphi_1 \to \tau_1} \quad \varphi_1 \to \tau_1 <: \varphi_2 \to \tau_2}{\vdots}}{E \vdash \texttt{fun}\ x \to a : \varphi_n \to \tau_n} \quad \varphi_n \to \tau_n <: \varphi \to \tau}{E \vdash \texttt{fun}\ x \to a : \varphi \to \tau} \quad E \vdash v : \varphi}{E \vdash (\texttt{fun}\ x \to a)\ v : \tau}$$

En effet, les règles de typage ne sont plus dirigées par la syntaxe: pour tout terme a, il y a deux règles qui peuvent dériver $E \vdash a : \tau$, la règle (sub) et la règle propre à la forme de a (p.ex. (fun) si a est une fonction). Donc, la forme générale d'une dérivation de $E \vdash \texttt{fun}\ x \to a : \varphi \to \tau$ est une étape de règle (fun) suivie par zéro, une ou plusieurs étapes de (sub).

Par transitivité du sous-typage (exercice 7.1), nous avons $\varphi_1 \to \tau_1 <: \varphi \to \tau$, ce qui implique $\varphi <: \varphi_1$ et $\tau_1 <: \tau$. Appliquant la règle (sub), on a donc $E \vdash v : \varphi_1$. Comme de plus $E + \{x : \varphi_1\} \vdash a : \tau_1$, un lemme de substitution analogue au lemme 2.2 montre que $E \vdash a[x \leftarrow v] : \tau_1$. Appliquant une dernière fois la règle (sub), il vient $E \vdash a[x \leftarrow v] : \tau$; c'est le résultat attendu.

Exercice 7.3 Tout terme du lambda-calcul pur peut être vu comme une expression de mini-ML ayant le type $\tau = \mu\alpha.\ \alpha \to \alpha$. Considérons par exemple $\texttt{fun}\ x \to a$. Si sous l'hypothèse $x : \tau$ le type de a est τ, alors $\texttt{fun}\ x \to a$ a le type $\tau \to \tau$ qui par enroulage est égal à τ. De même, si a_1 et a_2 ont le type τ, alors par déroulage a_1 a aussi le type $\tau \to \tau$, donc l'application $a_1\ a_2$ est bien typée et a le type τ.

Exercice 7.4
1)

```
                                              ------          ---------
                                             |      |        |         |
   ->            *        *        ->        |       ->        |
  /  \          / \      / \      /  \       |      /  \       |
int   bool     V   V     \ /    int   \____|     V     ->      |
                          V                               /  \     |
                                                         V    \____|
```

2) La substitution renvoyée a deux classes d'équivalence: l'une contient les trois noeuds $\to$ du graphe de départ, et l'autre les trois noeuds représentant `int`, α et β dans le graphe de départ.

3) Tout d'abord, il est clair que si R est une relation d'équivalence et $R' = \texttt{mgu}(E, R)$ est définie, alors R' est une relation d'équivalence, et de plus les classes d'équivalence de R sont incluses dans celles de R'.

Ensuite, considérons un appel $\texttt{mgu}(E, R)$ qui, récursivement, appelle $\texttt{mgu}(E', R')$. Dans tous les cas de l'algorithme, pour tout $(n_1 \stackrel{?}{=} n_2) \in E$, on a ou bien $(n_1 \stackrel{?}{=} n_2) \in E'$, ou bien $n_1\ R\ n_2$.

Donc, par récurrence sur le déroulement de l'algorithme, il vient que $R = \mathtt{mgu}(E, id)$ satisfait les équations de E: pour tout $(n_1 \stackrel{?}{=} n_2) \in E$, on a $n_1 \; R \; n_2$.

Il reste à vérifier que $R = \mathtt{mgu}(E, id)$ vérifie les conditions de compatibilité et de fermeture. Si $n \; R \; n'$ et $C(n) \neq V$ et $C(n') \neq V$, alors forcément une des étapes de l'algorithme a été

$$\begin{array}{rcl} \mathtt{mgu}(\{n \stackrel{?}{=} n'\} \cup E, R) & = & \mathtt{mgu}(E \cup \{F_1(n) \stackrel{?}{=} F_1(n'); \ldots ; F_k(n) \stackrel{?}{=} F_k(n')\}, R + \{n = n'\}) \\ & & \text{si } C(n) \neq V \text{ et } C(n') = C(n) \text{ et } k = A(C(n)) \end{array}$$

Donc $C(n) = C(n')$, et de plus la relation R satisfait les équations de $E \cup \{F_1(n) \stackrel{?}{=} F_1(n'); \ldots ; F_k(n) \stackrel{?}{=} F_k(n')\}$, d'où $F_i(n) \; R \; F_i(n')$ pour tout i. Par conséquent, R est une substitution, et comme elle satisfait toutes les équations de E, c'est un unificateur de E.

Soit maintenant R' un unificateur de E. On montre par récurrence sur le déroulement de l'algorithme que si R_1 est plus fine que R' et $R_2 = \mathtt{mgu}(E, R_1)$, alors R_2 est plus fine que R'. Faisons par exemple le cas

$$\begin{array}{rcl} \mathtt{mgu}(\{n \stackrel{?}{=} n'\} \cup E, R_1) & = & \mathtt{mgu}(E \cup \{F_1(n) \stackrel{?}{=} F_1(n'); \ldots ; F_k(n) \stackrel{?}{=} F_k(n')\}, R_1 + \{n = n'\}) \\ & & \text{si } C(n) \neq V \text{ et } C(n') = C(n) \text{ et } k = A(C(n)) \end{array}$$

Puisque R' est un unificateur de $\{n \stackrel{?}{=} n'\} \cup E$, on a nécessairement $n \; R' \; n'$. Comme R' est une relation d'équivalence et qu'elle est moins fine que R_1, elle est aussi moins fine que $R_1 + \{n = n'\}$. De plus, R' est un unificateur de $E \cup \{F_1(n) \stackrel{?}{=} F_1(n'); \ldots ; F_k(n) \stackrel{?}{=} F_k(n')\}$ puisque c'est un unificateur de $E \cup \{n \stackrel{?}{=} n'\}$ et puisque R' satisfait la condition de fermeture. Appliquant l'hypothèse de récurrence, il vient que $R_2 = \mathtt{mgu}(E \cup \{F_1(n) \stackrel{?}{=} F_1(n'); \ldots ; F_k(n) \stackrel{?}{=} F_k(n')\}, R_1 + \{n = n'\})$ est plus fine que R'. C'est le résultat attendu, puisque $R_2 = \mathtt{mgu}(\{n \stackrel{?}{=} n'\} \cup E, R_1)$.

4) À chaque appel récursif de $\mathtt{mgu}(E, R)$, ou bien le nombre de classes d'équivalences de R diminue d'un, ou bien R est inchangé mais le nombre d'équations de E diminue d'un. Ceci garantit que `mgu` ne peut pas boucler.

Exercice 7.5

1) La symétrie est évidente par récurrence sur les deux types.

Si $d(\tau_1, \tau_2) = 0$, ou bien τ_1 et τ_2 sont la même variable de type, ou bien τ_1 et τ_2 sont deux types flèche $\varphi_1 \to \psi_1$ et $\varphi_2 \to \psi_2$, et $d(\varphi_1, \varphi_2) = 0$ et $d(\psi_1, \psi_2) = 0$. Par récurrence, il vient $\varphi_1 = \varphi_2$ et $\psi_1 = \psi_2$, d'où $\tau_1 = \tau_2$.

Pour l'inégalité du triangle ultramétrique, on raisonne par récurrence et par cas sur les trois types τ_1, τ_2, τ_3. On dit que deux types sont en désaccord si ce sont deux variables différentes, ou si l'un est un type flèche et l'autre une variable. La distance entre deux types en désaccord est toujours 1.

Si τ_1 et τ_2 sont en désaccord, ou τ_2 et τ_3 en désaccord: alors $\max(d(\tau_1, \tau_2), d(\tau_2, \tau_3)) = 1$ et l'inégalité est vérifiée, car $d(\tau_1, \tau_3) \leq 1$ quels que soient τ_1 et τ_3.

Si $\tau_1 = \tau_2 = \tau_3 = \alpha$, les trois distances sont nulles et l'inégalité est vérifiée.

Enfin, si $\tau_1 = \varphi_1 \to \psi_1$ et $\tau_2 = \varphi_2 \to \psi_2$ et $\tau_3 = \varphi_3 \to \psi_3$: par hypothèse de récurrence, on a $d(\varphi_1, \varphi_3) \leq \max(d(\varphi_1, \varphi_2), d(\varphi_2, \varphi_3))$ et de même $d(\psi_1, \psi_3) \leq \max(d(\psi_1, \psi_2), d(\psi_2, \psi_3))$. D'où:

$$d(\varphi_1 \to \psi_1, \varphi_3 \to \psi_3) \quad = \quad 1/2 \max(d(\varphi_1, \varphi_3), d(\psi_1, \psi_3))$$

$$
\begin{aligned}
&\leq 1/2\max(d(\varphi_1,\varphi_2),d(\varphi_2,\varphi_3),d(\psi_1,\psi_2),d(\psi_2,\psi_3))\\
&= \max(1/2\max(d(\varphi_1,\varphi_2),d(\psi_1,\psi_2)),1/2\max(d(\varphi_2,\varphi_3),d(\psi_2,\psi_3)))\\
&= \max(d(\varphi_1\to\psi_1,\varphi_2\to\psi_2),d(\varphi_2\to\psi_2,\varphi_3\to\psi_3))
\end{aligned}
$$

2a) Soient (τ_n) et (τ'_n) deux suites de Cauchy. On montre que la suite $(d(\tau_n,\tau'_n))$ à valeurs dans $\mathbf{R}$ est de Cauchy. En effet, pour tous p,q, on a:

$$d(\tau_p,\tau'_p)\leq\max(d(\tau_p,\tau_q),d(\tau_q,\tau'_q),d(\tau'_q,\tau'_p))$$

d'où

$$d(\tau_p,\tau'_p)-d(\tau_q,\tau'_q)\leq\max(d(\tau_p,\tau_q),d(\tau'_q,\tau'_p))$$

et, en intervertissant les rôles de p et q,

$$d(\tau_q,\tau'_q)-d(\tau_p,\tau'_p)\leq\max(d(\tau_q,\tau_p),d(\tau'_p,\tau'_q))$$

d'où

$$|d(\tau_p,\tau'_p)-d(\tau_q,\tau'_q)|\leq\max(d(\tau_q,\tau_p),d(\tau'_p,\tau'_q)).$$

Soit $\varepsilon>0$. Soient N_1 et N_2 tels que $p,q\geq N_1\Rightarrow d(\tau_p,\tau_q)\leq\varepsilon$ et $p,q\geq N_2\Rightarrow d(\tau'_p,\tau'_q)\leq\varepsilon$. Pour tous $p,q\geq\max(N_1,N_2)$, on a donc $|d(\tau_p,\tau'_p)-d(\tau_q,\tau'_q)|\leq\max(\varepsilon,\varepsilon)=\varepsilon$. Donc la suite $(d(\tau_n,\tau'_n))$ est de Cauchy dans $\mathbf{R}$. Elle converge donc.

2b) La réflexivité de $\cong$ découle de $d(\tau,\tau)=0$ pour tout τ. La symétrie de $\cong$ découle de celle de d. Pour la transitivité de $\cong$, supposons $(\tau_n)\cong(\tau'_n)$ et $(\tau'_n)\cong(\tau''_n)$. Pour tout n, on a:

$$d(\tau_n,\tau''_n)\leq\max(d(\tau_n,\tau'_n),d(\tau'_n,\tau''_n))$$

Passant à la limite $n\to\infty$, il vient

$$d(\tau,\tau'')\leq\max(d(\tau,\tau'),d(\tau',\tau''))=0$$

d'où $(\tau_n)\cong(\tau''_n)$.

2c) Par passage à la limite sur l'inégalité du triangle ultramétrique, on a $d(s,s'')\leq\max(d(s,s'),d(s',s''))$ pour toutes suites s,s',s''. De même, $d(s,s')=d(s',s)$.

On vérifie maintenant que d passe au quotient par $\cong$. Si $s\cong s'$ et $u\cong u'$, on a

$$d(s',u')\leq\max(d(s',s),d(s,u),d(u,u'))=d(s,u)$$

et de même

$$d(s,u)\leq\max(d(s,s'),d(s',u'),d(u',u))=d(s',u').$$

Donc $d(s,u)=d(s',u')$, et d passe au quotient par $\cong$.

Par définition de $\cong$, $d(s,u)=0$ si et seulement si $s\cong u$, c'est-à-dire si et seulement si s et u sont égales dans $\mathcal{S}/\cong$.

2d) À tout type simple τ on associe la suite constante $(\tau,\tau,\ldots)$. La distance entre deux telles suites constantes (τ) et (τ') est bien sûr $d(\tau,\tau')$.

2e) Soit (s_n) une suite de Cauchy à valeurs dans $\mathcal{T}$, c'est-à-dire une suite de Cauchy de suites de Cauchy. On note $s_{n,p}$ le $p^{\text{ième}}$ élément de la suite s_n.

Par définition de $\mathcal{T}$, la suite $(s_{n,p})_{p\in\mathbf{N}}$, vue comme suite à valeurs dans $\mathcal{T}$, converge vers s_n. Donc, pour tout $n > 0$, il existe $N(n)$ tel que

$$p \geq N(n) \Rightarrow d(s_{n,p}, s_n) \leq \frac{1}{n}$$

On définit la suite diagonale u par $u_n = s_{n,N(n)}$. Montrons que u est de Cauchy et que (s_n) converge vers u. Pour tous p, q, on a:

$$d(u_p, u_q) = d(s_{p,N(p)}, s_{q,N(q)}) \leq \max(d(s_{p,N(p)}, s_p),\ d(s_p, s_q),\ d(s_q, s_{q,N(q)})) \leq \max(\frac{1}{p}, d(s_p, s_q), \frac{1}{q})$$

Soit $\varepsilon > 0$. Soit N_0 tel que

$$p, q \geq N_0 \Rightarrow d(s_p, s_q) \leq \varepsilon.$$

Soit N_1 tel que $1/N_1 \leq \varepsilon$. Pour tous $p, q \geq \max(N_0, N_1)$, on a

$$d(u_p, u_q) \leq \max(\frac{1}{p}, d(s_p, s_q), \frac{1}{q}) \leq \max(\frac{1}{N_1}, \varepsilon, \frac{1}{N_1}) \leq \varepsilon$$

Donc la suite u est bien de Cauchy.

Montrons que (s_n) converge vers u. Pour tous p et q,

$$d(u_p, s_q) = d(s_{p,N(p)}, s_q) \leq \max(d(s_{p,N(p)}, s_p),\ d(s_p, s_q)) \leq \max(\frac{1}{p}, d(s_p, s_q))$$

Soit $\varepsilon > 0$. Soit N_0 tel que

$$p, q \geq N_0 \Rightarrow d(s_p, s_q) \leq \varepsilon.$$

Soit N_1 tel que $1/N_1 \leq \varepsilon$. Pour tous $p, q \geq \max(N_0, N_1)$, on a

$$d(u_p, s_q) \leq \max(\frac{1}{p}, d(s_p, s_q)) \leq \max(\frac{1}{N_1}, \varepsilon) \leq \varepsilon$$

Faisant tendre p vers ∞, il vient $d(u, s_q) \leq \varepsilon$. Donc, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N = \max(N_0, N_1)$ tel que $q \geq N \Rightarrow d(u, s_q) \leq \varepsilon$. Ceci montre que u est la limite de (s_q).

3) Unicité du point fixe: si x et y sont deux points fixes de F, on a $x = F(x)$ et $y = F(y)$, d'où

$$d(x, y) = d(F(x), F(y)) \leq k\, d(x, y)$$

et comme $k < 1$, ceci entraîne $d(x, y) = 0$, d'où $x = y$.

Existence du point fixe: on construit la suite (x_n) par $x_{n+1} = F(x_n)$ et x_0 quelconque. On a

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq k\, d(x_n, x_{n-1}) \leq \ldots \leq k^n d(x_1, x_0)$$

Montrons que la suite (x_n) est de Cauchy. On a

$$d(x_{n+p}, x_n) \leq d(x_{n+p}, x_{n+p-1}) + \cdots + d(x_{n+1}, x_n) \leq (k^{n+p} + \cdots + k^n) d(x_1, x_0) \leq \frac{k^n}{1-k} d(x_1, x_0)$$

Soit alors $\varepsilon > 0$. Soit N suffisamment grand pour que $n \geq N$ entraîne $\frac{k^N}{1-k} d(x_1, x_0) \leq \varepsilon/2$. Pour tous $p, q \geq N$, on a

$$d(x_p, x_q) \leq d(x_p, x_N) + d(x_N, x_q) \leq \frac{k^N}{1-k} d(x_1, x_0) + \frac{k^N}{1-k} d(x_1, x_0) \leq \varepsilon$$

Donc la suite (x_n) est de Cauchy. Soit x sa limite. Pour tout n, on a $d(x_{n+1}, F(x)) \leq k\, d(x_n, x)$. Faisant tendre n vers ∞, il vient que $F(x)$ est la limite de la suite (x_n). Par unicité de la limite, il s'ensuit $F(x) = x$, et x est un point fixe de F.

4) Pour tous types finis τ, τ', τ'', on montre par une récurrence facile sur τ que

$$d(\tau[\alpha \leftarrow \tau'], \tau[\alpha \leftarrow \tau'']) \leq d(\tau', \tau'')$$

Si de plus $\tau \neq \alpha$, on a

$$d(\tau[\alpha \leftarrow \tau'], \tau[\alpha \leftarrow \tau'']) \leq \frac{1}{2} d(\tau', \tau'').$$

En effet, ou bien τ est une variable de type différente de α, et alors $\tau[\alpha \leftarrow \tau'] = \tau[\alpha \leftarrow \tau'']$, ou bien τ est un type flèche $\tau_1 \to \tau_2$ et alors

$$d(\tau[\alpha \leftarrow \tau'], \tau[\alpha \leftarrow \tau'']) \leq \frac{1}{2} \max(d(\tau_1[\alpha \leftarrow \tau'], \tau_1[\alpha \leftarrow \tau'']), d(\tau_2[\alpha \leftarrow \tau'], \tau_2[\alpha \leftarrow \tau''])) \leq \frac{1}{2} d(\tau', \tau'')$$

Cette inégalité s'étend ensuite à des types τ, τ', τ'' infinis par passage à la limite.

Par conséquent, l'opérateur $F(\tau') = \tau[\alpha \leftarrow \tau']$ est contractif: $d(F(\tau', \tau'')) \leq \frac{1}{2} d(\tau', \tau'')$. Appliquant le théorème de Banach-Tarski, il vient qu'il existe un et un seul point fixe τ' de F. Donc, $\tau' = \tau[\alpha \leftarrow \tau']$ et τ' est le seul type qui vérifie cette égalité.