INTRODUCTION A LA THEORIE DES CORDES

Enseignement d'approfondissement

Benoît Sagot

16 mars 2004

Table des matières

Préliminaires

1 Introduction

L'une des plus grandes quêtes de la physique actuelle est l'unification des forces fondamentales en une seule théorie. Le programme ainsi défini a donc pour objectif la réconciliation de la théorie quantique des champs, qui décrit les interactions éléctrofaibles (éléctromagnétiques et faibles) et les interactions fortes, et de la relativité générale. C'est donc l'unification de l'infiniment petit et de l'infiniment grand en un tout cohérent, domaines respectifs dans lesquels les deux théories en question décrivent le monde réel avec une précison incroyable. Mais ces deux théories, paradoxalement, sont en l'état incompatibles, et même l'apparition des techniques de renormalisation n'a pas résolu ce problème : des infinis rédhibitoires apparaissent inévitablement.

Il est apparu cependant petit à petit que la solution de ce problème est lié au concept d'invariance de jauge : les lois de la nature ont tendance à être invariantes dans des transformations dites de jauge, dont l'étude en termes de théorie des groupes est particulièrement efficace dans un objectif d'unification. Mais même les invariances de jauge puissantes de la théorie quantique des champs et la covariance des équations d'Einstein sont insuffisantes pour générer une théorie finie de la gravité quantique.

A présent, la théorie la plus prometteuse pour une description unifiée et finie de ces deux théories fondamentales est la théorie des supercordes. Les supercordes en effet possèdent un ensemble considérable d'invariances de jauge, suffisamment peut-être pour éliminer toutes les divergences de la gravité quantique. Elles incluent de fait la Relativité générale, la théorie quantique des champs, mais aussi la supergravité et les Théories de Grande Unification (GUT).

L'idée de base de la théorie des cordes est de considérer qu'une particule élémentaire n'est pas ponctuelle, comme dans toutes les théories élaborées jusqu'alors, mais possède une géométrie interne unidimensionnelle : c'est une corde, qui peut être ouverte ou fermée. De manière imagée, les infinis qui apparaissent traditionnellement en théorie quantique, et qui sont dûs à la possibilité d'interactions à quatre particules en un même point, sont éliminés par l'extension spatiale des cordes, qui élimine le concept d'interaction ponctuelle.

Cette théorie souffre toutefois de deux problèmes majeurs. Tout d'abord, elle n'est pas comprise dans son fondement, en ce sens qu'on ne connaît pas les principes fondamentaux dont elle découle, contrairement à ce qui se passe pour la théorie quantique des champs ou pour la Relativité générale. Enfin, elle n'est pas unique : il existe plusieurs théories de cordes, dont les seules intéressantes, les théories des supercordes, sont en dimension dix ; et pour chacune il existe un nombre important de manières de décrire notre univers à quatre dimensions à partir de ces dix dimensions. Il est probable qu'un principe fondamental soit encore à découvrir.

2 Théorie des groupes et physique fondamentale

2.1 Représentations d'un groupe

On suppose connus les fondements élémentaires de la théorie des groupes. On appelle représentation d'un groupe la donnée d'un espace E et d'un morphisme U du groupe dans $GL(E)$, en sorte que pour deux éléments g et g' du groupe on a $U_{gg'} = U_g U_{g'}$. Si le morphisme est un isomorphisme, la représentation est dite fidèle. Si à l'inverse tous les éléments du groupe ont pour image par U l'identité de E, la représentation est dite triviale. Par abus de langage, on appelle souvent représentation du groupe l'espace E lui-même, espace sur lequel agissent les opérateurs U_g. On appelle dimension de la représentation la dimension de E. Si E est de dimension finie, les opérateurs U_g, moyennant le choix d'une base, s'expriment sous forme matricielle.

Deux représentations de même dimension dont les matrices coïncident moyennant des choix de bases adaptés sont dites équivalentes. On peut exprimer ceci plus formellement en disant que deux représentations (E^1, U^1) et (E^2, U^2) sont équivalentes si et seulement s'il existe un isomorphisme T de E^1 sur E^2 tel que pour tout élément g du groupe on ait

$$T\,U_g^1 = U_g^2\,T.$$

La notion essentielle est alors celle de classe de représentations.

Si les matrices U_g sont unitaires ($U_g U_g^\dagger = I$), la représentation est dite unitaire. La somme directe de deux représentations (E^1, U^1) et (E^2, U^2) est la représentation d'espace $E^1 \oplus E^2$ et de morphisme $U^1 \oplus U^2$ défini pour un élément g du groupe et un élément $\phi^1 \oplus \phi^2$ de $E^1 \oplus E^2$ par

$$(U_g^1 \oplus U_g^2)(\phi^1 \oplus \phi^2) = (U_g^1 \phi^1) \oplus (U_g^2 \phi^2).$$

Le produit tensoriel de deux représentations (E^1, U^1) et (E^2, U^2) est la représentation d'espace $E^1 \otimes E^2$ et de morphisme $U^1 \otimes U^2$ défini pour un élément g du groupe et un élément $\phi^1 \otimes \phi^2$ de $E^1 \otimes E^2$ par

$$(U_g^1 \otimes U_g^2)(\phi^1 \otimes \phi^2) = (U_g^1 \phi^1) \otimes (U_g^2 \phi^2).$$

2.2 Représentations irréductibles

Une représentation est dite réductible s'il existe un sous-espace de l'espace de représentation qui est invariant par le morphisme. Dans le cas contraire, la représentation est dite irréductible. Une représentation est dite totalement réductible si elle est somme directe de représentations irréductibles. Une représentation unitaire de dimension finie réductible est toujours totalement réductible. Or on montre que toute représentation de dimension finie peut être transformée en une représentation unitaire. Donc toute représentation de dimension finie est totalement réductible. Par ailleurs, les représentations irréductibles d'un produit direct de groupes sont les produits tensoriels des représentations irréductibles des facteurs.

Si l'on dispose de deux représentations (E^1, U^1) et (E^2, U^2) d'un même groupe, alors un opérateur d'entrelacement T, défini comme étant une application linéaire de E^1 dans E^2 telle que $\forall g$ on ait $TU^1_g = V_g T$, est soit nul soit un isomorphisme (auquel cas les deux représentations sont équivalentes). Et un opérateur d'entrelacement d'une représentation irréductible complexe avec elle-même (c'est-à-dire par conséquent une matrice commutant avec toutes les matrices de la représentation) est un multiple de l'identité. Ces deux derniers résultats forment le Lemme de Schur. Un corrolaire immédiat en est que toute représentation irréductible d'un groupe ablélien est de dimension 1.

Le nombre de représentations irréductibles inéquivalentes d'un groupe fini est égal à celui de ses classes de conjugaison, et la somme des carrés de leurs dimensions est égale au cardinal du groupe.

2.3 Groupes de Lie

On appelle groupe de Lie linéaire un groupe de matrices, sous-groupe fermé de $GL_n(\mathbb{C})$. Les éléments d'un groupe de Lie donné peuvent se décomposer de manière unique sous la forme

$$M = e^{\sum_{i=1}^{d} \rho^i \lambda_i},$$

à condition de choisir les matrices λ_i, appelés générateurs du groupe, indépendantes et en nombre adéquat, d, appelé dimension du groupe de Lie. L'algèbre de Lie d'un groupe de Lie est l'espace engendré par les générateurs du groupe. On peut le considérer comme l'espace "tangent" au groupe en ce sens qu'il est généré par les générateurs. Le crochet de Lie de deux éléments de l'algebre, noté $[A, B]$, est le commutateur défini par

$$[A, B] = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \left(e^{tX} Y e^{-tX} - Y \right).$$

Les crochets des générateurs, écrits sous la forme

$$[\lambda_i, \lambda_j] = f_{ij}^k \lambda_k,$$

fournissent les constantes de structure de l'algèbre, les f_{ij}^k, qui définissent l'algèbre complètement à eux seuls. Par ailleurs, on a l'identité dite de Jacobi suivante[1] :

$$[\lambda_{[i}, [\lambda_j, \lambda_{k]}]] = 0,$$

qui peuvent s'écrire aussi sous la forme $f^l_{[i,j} f^m_{k],l} = 0$.

[1] Les crochets indicés signifient qu'il faut additionner les trois commutateurs obtenus par permutation circulaire des indices entre ces crochets

Un groupe de Lie étant un groupe de matrices, il est à soi-même une représentation, dite naturelle. Sa représentation adjointe est définie comme ayant pour espace de représentation son algèbre de Lie et comme morphisme U le morphisme défini par $U_g(X) = gXg^{-1}$.

On appelle représentation d'une algèbre de Lie dans un espace vectoriel E la donnée de E et d'une application linéaire F de l'algèbre dans l'ensemble des endomorphismes de E vérifiant pour tout couple (X, Y) d'éléments de l'algèbre la relation

$$F([X, Y]) = [F(X), F(Y)].$$

Une représentation (E, U) d'un groupe de Lie définit naturellement une représentation de son algèbre dans le même espace, avec pour application linéaire F l'application définie pour un élément X de l'algèbre par

$$F(X) = \left.\frac{d}{dt} U_{e^{tX}}\right|_{t=0}.$$

Parmi tous les groupes de Lie ayant la même algèbre, il en existe un et un seul qui soit simplement connexe, appelé revêtement universel de l'algèbre (ou revêtement de tout autre groupe ayant la même algèbre). Les autres groupes ayant la même algèbre sont les quotients de ce groupe par des sous-groupes discrets de son centre.

2.4 Groupes de symétrie

Les symétries d'un système physique (i.e. les symétries de ses lois, y compris d'interaction) forment un groupe de Lie, dit groupe de symétrie du système, représenté dans l'espace des états par des opérateurs unitaires (qui commutent par définition avec le hamiltonien du système). Cette représentation peut donc être décomposée en somme directe de représentations irréductibles[2]. Le Lemme de Schur montre que le système ne peut pas passer d'un état situé dans une représentation irréductible vers un état d'une représentation irréductible inéquivalente.

Empiriquement, une particule est un objet simple aux caractéristiques bien déterminées. Mais tout opérateur commutant avec les opérateurs de symétrie est nécessairement, dans l'espace d'une représentation irréductible du groupe de symétrie du système, un multiple de l'identité. Deux états appartenant à une même représentation du groupe de symétrie d'une particule étant indiscernables, il apparait clairment que la manière la plus adéquate de définir mathématiquement une particule comme étant une représentation irréductible de ce groupe. Pour identifier ces représentations, on utilise des opérateurs polynômes des générateurs du groupe de symétrie, et qui commutent avec eux. On les appelle opérateurs de Casimir, et leurs valeurs propres sont les caractéristiques des particules correspondantes.

Donnons quelques exemples de groupes de symétrie que l'on rencontre souvent. Tout d'abord le groupe orthogonal $O(N)$, groupe des matrices réelles inversibles de taille

[2] Il faut bien voir ici que c'est l'espace des états que l'on écrit comme somme de sous-espaces

N qui sont orthogonales, c'est-à-dire dont l'inverse est égale à la transposée, et son sous-groupe $SO(N)$ contenant parmi les matrices précédentes celles de déterminant égal à 1, appelé groupe spécial orthogonal. On peut considérer la notion d'orthogonalité comme étant la conservation du produit scalaire $x_i \delta^{ij} x_j$. On appelle alors métrique le tenseur identité δ_{ij}. Si on autorise la métrique à avoir N signes positifs et M signes négatifs, on obtient les groupes $O(N, M)$ et $SO(N, M)$. Ainsi, le groupe de Lorentz en dimension D est le groupe $O(1, D-1)$. On confond évidemment les groupes $O(N, M)$ et $O(M, N)$ (et de même pour les groupes spéciaux), ce qui permet de choisir arbitrairement le signe de la métrique. On préfère ainsi appeler métrique le tenseur diagonal $\eta_{\mu\nu}$ comportant M fois $+1$ puis M fois -1 sur sa diagonale. Munis de la topologie usuelle sur les matrices, les groupes $O(N)$ et $SO(N)$ sont compacts, alors que les groupes $O(N, M)$ et $SO(N, M)$ (où $NM \neq 0$) ne le sont pas.

3 Spineurs

Les spineurs sont les éléments de l'espace de représentation de certaines représentation d'un groupe de la famille $O(N, M)$ ou de la famille $SO(N, M)$ (par restriction des précédentes), dites représentations spinorielles[3]. On dit, pour définir le groupe d'origine $SO(N, M)$, qu'un spineur se transforme selon $SO(N, M)$. Pour préciser les choses, définissons l'algèbre de Clifford comme étant l'algèbre dont les générateurs Γ^μ vérifient les relations d'anticommutation suivantes[4] :

$$\{\Gamma^\mu, \Gamma^\nu\} = -2\eta^{\mu\nu},$$

où $\eta^{\mu\nu}$ est la métrique de l'espace-temps considéré[5], c'est donc une matrice diagonale dont les termes diagonaux sont égaux à ± 1. On a en général $\eta^{\mu\nu} = (+, -, \cdots, -)$ ou[6] $-\eta^{\mu\nu} = (+, \cdots, +)$, avec des notations évidentes. Les Γ^μ sont appelés nombres de Clifford. Appelons D la dimension de l'espace-temps.

Si $D = 2n$ est pair, les nombres de Clifford peuvent être représentés (de différentes manières) par D matrices de taille 2^n, notées $(\Gamma^\mu)_{AB}$ ou simplement Γ^μ, dites matrices de Dirac. On peut en déduire une représentation de $O(N, M)$ à l'aide des générateurs $\sigma^{\mu\nu} = \frac{1}{4}[\Gamma^\mu, \Gamma^\nu]$, car ils vérifient les bonnes relations de commutation[7]. C'est cette représentation dont les éléments sont appelés spineurs. Les spineurs ont donc 2^n coordonnées. Pour le cas où $D = 2n+1$ est impair, on a besoin d'un générateur supplémentaire, qui s'avère être $\Gamma_{2n+1} = \Gamma^1 \Gamma^2 \dots \Gamma^{2n}$, qui vérifie $(\Gamma_{2n+1})^2 = \pm 1$ (plus exactement $(-1)^{N+2n-1} = (-1)^{N-1}$). Dans le cas $D = 2n$ et N impair, cette dernière matrice a aussi un rôle, dû

[3] C'est aussi de cette manière que sont définis par exemple les scalaires ou les vecteurs.

[4] Ici, la notation $\{A, B\}$ désigne l'anticommutateur de A et B, c'est-à-dire $\lim_{t \to 0} \frac{1}{t}\left(e^{tX} Y e^{-tX} + Y\right)$, à ne pas confondre avec le crochet de Poisson de A et B, noté de la même manière, que l'on utilise dans un contexte non quantifié, comme dans la première partie du chapitre 1.

[5] Rigoureusement, la métrique est $-\eta^{\mu\nu}$, mais comme expliqué au paragraphe précédent cette convention de signe ne change rien fondamentalement, si ce n'est le signe de l'anticommutateur.

[6] Relire la note précédente pour voir l'origine du signe moins

[7] Il s'agit des relations $[\sigma^{\mu\nu}, \sigma^{\mu'\nu'}] = \eta_{\nu\mu'}\sigma_{\mu\nu'} - \eta_{\nu\nu'}\sigma_{\mu\mu'} + \eta_{\mu\nu'}\sigma_{\nu\mu'} - \eta_{\mu\mu'}\sigma_{\nu\nu'}$

au fait que $(\Gamma_{2n+1})^2 = 1$: un spineur ϕ, s'il vérifie $\Gamma_{2n+1}\phi = 1$, est dit de chiralité positive, et s'il vérifie $\Gamma_{2n+1}\phi = -1$ de chiralité négative. Un spineur de chiralité définie (vérifiant $\Gamma_{2n+1}\phi = \pm 1$) est dit spineur de Weyl. Les opérateurs $\frac{1}{2}(1 \pm \Gamma_{2n+1})$ sont alors les opérateurs de projection sur les deux sous-espaces de chiralité définie. Puisque l'on prend systématiquement $N = 1$ (une dimension de temps), les spineurs de Weyl sont définis si et seulement si la dimension D de l'espace-temps est pair.

Comme dit plus haut, on peut représenter les nombres de Clifford de différentes manières par des matrices. Il se trouve que dans le cas où D est congru à 2, 3 ou 4 modulo 8, on peut choisir ces matrices comme étant toutes imaginaires pures ou toutes réelles, ce qui donne une matrice Γ_{2n+1} purement réelle. L'équation de Dirac sans masse pour un champ spinoriel ψ, qui est la condition pour qu'il s'agisse d'un champ physique, est $i\Gamma^\mu\partial_\mu\psi$. Cette remarque montre qu'il est alors cohérent d'imposer à ψ la réalité de ses coefficients. On construit ainsi une représentation de $O(N, M)$ dont l'espace de représentation est réel. Une telle représentation est appelée représentation de Majorana, et les spineurs qui en sont les éléments sont dits spineurs de Majorana. Ces spineurs ne sont donc définis que pour des dimensions D congrues à 2, 3 ou 4 modulo 8.

Enfin, il est d'usage de noter $\bar{\phi} = \phi^\dagger\,\Gamma^0$ (pour ϕ spineur). De plus, si $D = 2$ les matrices de Dirac sont plutôt notées ρ^0 et ρ^1, et γ^μ si $D = 4$.

4 Supersymétrie

4.1 Considérations générales

A la fin des années 1960, les physiciens cherchaient un groupe de symétrie permettant la synthèse d'un groupe de symétrie interne (par exemple $SU(3)$) et du groupe de Lorentz ou de Poincaré. Un grand intérêt fut tout d'abord accordé au groupe $SU(6, 6)$, mais un résultat mathématique crucial montra que le programme précédent était impossible[8]. Il en ressortait que soit le spectre des masses des particules fondamentales était continu, soit il existait un nombre infini de particules différentes pour chaque masse.

Cependant, ceci ne concernait que des groupes de Lie aux paramètres réels, et il se trouve que si on permet aux paramètres d'être des variables de Grassman[9], obtenant ainsi ce qu'on appelle des supergroupes, le résultat désatreux précédent est évité. Le plus simple de ces groupes est le groupe symplétique $Sp(N)$, groupe des transformations préservant le produit $\theta_\alpha\, C_{\alpha\beta}\, \theta_\beta$, où θ_α et θ_β sont des variables de Grassman (α et β varient de 1 à N), et donc $C_{\alpha\beta}$ nécessairement une matrice antisymétrique. Le groupe orthosymplétique $OSp(N|M)$ est alors le groupe des transformations préservant le produit scalaire usuels de vecteurs (de Lorentz) mais aussi le produit préservé par $Sp(N)$. Ainsi, $OSp(M|N)$ contient le produit $O(N) \otimes Sp(M)$.

[8] Il s'agit du théorème de Coleman-Mandula, qui montre qu'il n'existe pas de représentation unitaire de dimension finie d'un groupe non compact.

[9] Un nombre de Grassman θ_i anticommute avec tout autre nombre de Grassman mais commute avec les réels et les complexes.

4.2 Quelques éléments sur les supergroupes $OSp(1|M)$

L'incorporation de la supersymétrie à la Relativité générale s'est faite par l'intermédiaire du groupe $OSp(1|4)$, donnant la supergravité dite "N=1". Il se trouve qu'une des méthodes possibles pour incorporer la supersymétrie à la théorie des cordes, pour donner une théorie des supercordes, passe par le groupes $OSp(1|2)$, en supersymétrisant la surface (bi-dimensionnelle) balayée par la corde dans le temps[10]. Etudions donc les propriétés élémentaires du groupe $OSp(1|M)$. On se restreint aux cas où il est possible de prendre comme coordonnée anticommutante un spineur de Majorana[11], et donc, comme vu au paragraphe précédent, aux cas où M est congru à 2, 3 ou 4 modulo 8 (ce qui inclut en particulier les cas $M = 2$, $M = 4$ et $M = 10$). On se place donc dans un espace défini par M dimensions dites bosoniques décrites par M réels x_μ (ou σ_α dans le cas de la surface d'univers de la corde) et une coordonnée anticommutante que l'on décrit par un spineur de Majorana θ^A à $2^{M/2}$ composantes dites fermioniques[12], et donc respectivement 4 et 2 composantes pour la supergravité et la supercorde que nous considérons ici, soit exactement le nombre de coordonnées bosoniques dans chacun de ces deux cas.

Les générateurs du groupe $OSp(1|M)$ sont d'une part les générateurs du groupe de Poincaré, à savoir d'une part les M opérateurs P_μ générateurs des translations d'espace-temps et les $\frac{1}{2}M(M-1)$ générateurs des transformations de Lorentz et des rotations regroupés dans le tenseur antisymétrique $M_{\mu\nu}$, et d'autre part les $2^{M/2}$ générateurs de supersymétries, notés Q_A. Outre les relations de commutation habituelles des générateurs du groupe de Poincaré, on a les relations de commutation :

$$[Q_A, Q_B] = 2(\Gamma^\mu\Gamma^0)_{AB}P_\mu$$

$$[Q_A, P_\mu] = 0$$

$$[Q_A, M_{\mu\nu}] = (\sigma_{\mu\nu})_A^B\, Q_B,$$

où les matrices Γ^μ sont les matrices de Majorana[13] en M dimensions et où l'on a posé $\sigma^{\mu\nu} = \frac{1}{2}[\Gamma^\mu, \Gamma^\nu]$. Une représentation des Q_A, au sens où $-i\partial_\mu$ est une représentation de P_μ, est alors

$$Q_A = \frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^A} + i(\Gamma^\mu\theta)_A\partial_\mu,$$

comme on peut le voir en vérifiant les commutateurs.

[10] Il faut remarquer ici que les deux groupes dont il est question ne jouent pas le même rôle vis-à-vis des deux théories : la supergravité invoque une supersymétrie de l'espace-temps, alors que la supercorde considérée n'introduit qu'une supersymétrie de la surface d'univers décrite par la corde (il se trouve qu'il est possible moyennant certaines contraintes d'en déduire une supersymétrie de l'espace-temps, qui peut être de type N=1 ou N=2 suivant les conditions aux limites choisies, mais ceci n'est ni immédiat ni direct).

[11] En effet, si ψ_1 et ψ_2 sont deux spineurs de Majorana, on a $\bar{\psi}_1\psi_2 = {}^t\psi_1\, C\, \psi_2 = {}^t\psi_2\, {}^tC\, \psi_1 = -\psi_2\, C\, \psi_1 = -\bar{\psi}_2\psi_1$. La matrice C est ainsi égale à Γ^0.

[12] Ceci a un sens car M est pair à cause de la définition de θ^A comme spineur de Majorana

[13] C'est-à-dire comme vu au paragraphe précédent les matrices de Dirac dans une représentation de Majorana.

On a besoin, en vue de la création d'une action supersymétrique, d'un opérateur de dérivation invariant par supersymétrie. On définit ainsi l'opérateur de dérivation covariante de superespace par :

$$D_A = \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}^A} - i(\Gamma^\mu \theta)_A \partial_\mu.$$

On a en effet alors $\{D_A, Q_B\} = 0$. On a aussi besoin de définir l'intégrale sur une variable de Grassman, dite intégrale de Berezin. De même que l'intégrale $\int_{-\infty}^{\infty} dx\, \phi(x)$ sur une variable réelle est invariante par translation de x, on demande que l'intégrale sur une variable de Grassman θ ait la même propriété :

$$\int d\theta\, \phi(\theta) = \int d\theta\, \phi(\theta + c).$$

Le développement en série de Taylor de ϕ est simplement $\phi(\theta) = a + b\theta$ en raison du caractère anticommutatif de θ. Il suffit donc de définir les deux intégrales $\int d\theta$ et $\int d\theta\, \theta$. La condition d'invariance par translation donne alors trivialement, en normalisant la seconde à 1 :

$$\int d\theta = 0 \; ; \; \int d\theta\, \theta = 1.$$

On a donc l'égalité d'aspect inhabituel

$$\int d\theta = \frac{\partial}{\partial \theta}.$$

On travaille habituellement en introduisant un paramètre infinitésimal anticommutatif ϵ_A (spineur infinitésimal de Majorana), et en considérant les générateurs $\bar{\epsilon}Q$. La transformation engendrée sur les coordonnées de superespace est :

$$\delta\theta_A = [\bar{\epsilon}Q, \theta_A] = \epsilon_A$$

$$\delta x_\mu = [\bar{\epsilon}Q, x_\mu] = i\bar{\epsilon}\Gamma_\mu \theta.$$

La supersymétrie est donc dans le superespace une transformation "géométrique". Un superchamp $Y(x, \theta)$ est alors défini comme étant une fonction quelconque des coordonnées x et θ. Les propriétés d'anticommutation des θ^A permettent alors de développer Y sans perte de généralité en puissances des θ^A à l'aide d'un nombre fini de termes. Nous en verrons au Chapitre 2 l'application et l'utilisation dans le cas de la supercorde que nous y étudierons. On définit une représentation de la supersymétrie en écrivant la loi de transformation d'un superchamp sous l'action de $\bar{\epsilon}Q$: $\delta Y = \bar{\epsilon}QY$. On remarque alors que le produit de deux superchamps se transforme encore selon cette égalité, et qu'il en est de même pour $D_A Y$.

Chapitre 1

Cordes bosoniques libres

1 Théorie classique

1.1 Action et symétries

La généralisation de l'action d'une particule non massive classique

$$S = \frac{1}{2} \int d\tau \, e^{-1}(\tau) \, g_{\mu\nu}(x) \, \frac{dx^\mu}{d\tau} \, \frac{dx^\nu}{d\tau}$$

dans le cas d'une particule dont la géométrie interne est n-dimensionnelle est :

$$S = -\frac{T}{2} \int d^{n+1}\sigma \, \sqrt{h} \, h^{\alpha\beta}(\sigma) \, g_{\mu\nu}(X) \, \partial_\alpha X^\mu \, \partial_\beta X^\nu,$$

où $\sigma^0 = \tau$ et les σ^i pour $i = 1 \ldots n$ décrivent la géométrie interne de la particule. Le tenseur $h^{\alpha\beta}$ est l'inverse du tenseur $h_{\alpha\beta}(\sigma)$, métrique locale sur la particule ($h = |h_{\alpha\beta}|$). La signature de $h_{\alpha\beta}$ est $(+, - \cdots -)$, en sorte que $\sigma^0 = \tau$ est une coordonnée de type temps alors que les autres σ^i sont de type espace. Les $X^\mu(\sigma)$ paramétrisent l'hypersurface d'univers décrite par la particule.

Cette action est géométrique, car indépendante du choix des coordonnées σ^i. Le volume infinitésimal $\sqrt{h} \, d^{n+1}\sigma$ est en effet un invariant, ainsi que la quantité

$$h^{\alpha\beta}(\sigma) \, \partial_\alpha X^\mu \, \partial_\beta X^\nu.$$

Dans le cas d'une particule, il est possible de fixer en choisissant une jauge la valeur de e. Mais ici, le tenseur $h_{\alpha\beta}$, qui a le rôle de e, ne peut pas être fixé ainsi. En effet, il comporte $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$ composantes, et il n'y a que $n+1$ invariances de jauge par reparamétrisation qui soient indépendantes, et après les avoir fixées il reste donc $\frac{1}{2}n(n+1)$ composantes de h. Le cas particulier $n = 1$ ne laisse cependant qu'une seule composante, et l'existence d'une symétrie supplémentaire suggère qu'il doit être possible de fixer complètement h. Cette symétrie supplémentaire, qui est une invariance de Weyl de la métrique h s'écrit

$$h_{\alpha\beta} \;\to\; \Lambda(\sigma) \, h_{\alpha\beta}.$$

On a en effet par ce changment de métrique le changement

$$\sqrt{h}\, h_{\alpha\beta} \;\rightarrow\; \Lambda^{\frac{1}{2}(n+1)-1}(\sigma)\, \sqrt{h}\, h_{\alpha\beta},$$

qui laisse S invariant pour $n = 1$. C'est la raison pour laquelle les cordes ($n = 1$) sont des objets plus naturels à introduire que les n-branes dont la géométrie interne est à n dimensions. Nous ne considérerons donc que les cordes par la suite. Pour une corde, le paramètre T a la dimension d'une tension, et il s'avère que c'est en effet la tension de la corde.

Pour la suite et sauf indication contraire, on se place dans le cas où l'espace de Minkowski est plat, c'est-à-dire que le tenseur $g_{\mu\nu}(X)$ est indentiquement égal à l'identité. On a alors pour l'action :

$$S = -\frac{T}{2} \int d^2\sigma \, \sqrt{h}\, h^{\alpha\beta}(\sigma)\, \partial_\alpha X^\mu \, \partial_\beta X^\nu,$$

où l'on choisit $\sigma^1 \in [0, \pi[$ par convention.

Les symétries de cette action sont de deux types :

- Symétries locales (ξ et Λ sont fonction de σ) :
  - Invariance par la reparamétrisation

$$\delta X^\mu = \xi^\alpha \, \partial_\alpha X^\mu \;;\; \delta h^{\alpha\beta} = \xi^\gamma \, \partial_\gamma h^{\alpha\beta} - \partial_\gamma \xi^\alpha \, h^{\gamma\beta} - \partial_\gamma \xi^\beta \, h^{\alpha\gamma} \;;\; \delta(\sqrt{h}) = \partial_\alpha(\xi^\alpha \sqrt{h})$$

  - Invariance de Weyl $\delta h^{\alpha\beta} = \Lambda h^{\alpha\beta}$,
- Symétrie globale par invariance de Poincaré (a et b indépendants de σ) :

$$\delta X^\mu = a^\mu{}_\nu \, X^\nu + b^\mu \;;\; \delta h^{\alpha\beta} = 0,$$

où $a_{\mu\nu} = \eta_{\mu\rho}\, a^\rho{}_\nu$ est antisymétrique ($\eta_{\mu\rho}$ est la métrique de l'espace de Minkowski plat).

1.2 Choix de la jauge covariante

Comme nous le verrons plus bas, le tenseur bi-dimensionnel énergie-impulsion $T_{\alpha\beta} = \frac{\delta S}{\delta h^{\alpha\beta}}$ est le courant associé à une translation infinitésimale $\delta X^\mu = \epsilon^\mu$, et on verra plus bas que cela donne :

$$T_{\alpha\beta} = \partial_\alpha X^\mu \, \partial_\beta X^\mu - \frac{1}{2} h_{\alpha\beta}\, h^{\alpha'\beta'}\, \partial_{\alpha'} X^\mu \, \partial_{\beta'} X^\mu.$$

On remarque par ailleurs que l'invariance de Weyl annule la trace de $T_{\alpha\beta}$: $h^{\alpha\beta}\, T_{\alpha\beta} = 0$. La minimisation de l'action par rapport à $h^{\alpha\beta}$ s'écrit avec $T_{\alpha\beta}$ de la manière simple $T_{\alpha\beta} = 0$.

Exploitant les invariances de l'action, on peut fixer la jauge en posant

$$h_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

ce qui simplifie S en

$$S = -\frac{T}{2} \int d^2\sigma \, \eta^{\alpha\beta} \, \partial_\alpha X \cdot \partial_\beta X$$

qui donne l'équation de champ $\Box X^\mu \left(= \frac{\partial^2}{\partial\sigma^2} - \frac{\partial^2}{\partial\tau^2} \right) = 0$.

L'équation $\Box X^\mu = 0$ est nécessaire mais non suffisante pour assurer l'invariance par translation d'espace-temps de S, qui est pourtant physiquement indispensable. En effet, quand on applique une telle translation dans l'expression de S, on obtient, en plus du terme en $\Box X^\mu = 0$, le terme

$$-T \int d\tau \, \left[X'_\mu \, \delta X^\sigma|_{\sigma=\pi} - X'_\mu \, \delta X^\sigma|_{\sigma=0} \right] = 0,$$

qui fait intervenir les conditions aux limites. Il faut donc, pour obtenir une action stationnaire, adjoindre à $\Box X^\mu = 0$ cette condition dans le cas d'une corde ouverte, et naturellement le simple caractère cyclique pour le cas d'une corde fermée.

Pour résoudre $\Box X^\mu = 0$, on pose $\sigma^\pm = \tau \pm \sigma$, et on a donc $X^\mu(\sigma) = X^\mu_R(\sigma^-) + X^\mu_L(\sigma^+)$. On pose alors $\partial_\pm = \frac{1}{2}(\partial_\tau \pm \partial_\sigma)$. On a dans cette nouvelle base $\eta_{+-} = \eta_{-+} = -\frac{1}{2}$ et $\eta_{++} = \eta_{--} = 0$. L'équation $T_{\alpha\beta} = 0$, qui, en utilisant des points pour les dérivées par rapport à τ et les primes pour les dérivées par rapport à σ, s'écrit

$$\begin{cases} T_{01} = T_{10} = \dot{X} \cdot X' = 0 \\ T_{00} = T_{11} = \frac{1}{2}\left(\dot{X}^2 + X'^2\right) = 0 \end{cases}$$

se met alors dans notre système sous la forme

$$\begin{cases} T_{++} = \partial_+ X \cdot \partial_+ X = 0 \\ T_{--} = \partial_- X \cdot \partial_- X = 0 \\ T_{+-} = T_{-+} = 0 \end{cases}$$

d'où simplement $\dot{X}_R^2 = \dot{X}_L^2 = 0$, puisque la dernière des trois lignes précédentes était assurée par l'égalité remarquée plus haut $h^{\alpha\beta} T_{\alpha\beta} = 0$.

Pour une théorie en 2 dimensions, la loi de conservation de l'énergie-impulsion s'écrit sous la forme générale $\partial_- T_{++} + \partial_+ T_{-+} = 0$ (et l'équation symétrique en $+$ et $-$). On a donc ici simplement $\partial_- T_{++} = 0$. Cette égalité correspond à l'existence d'un nombre infini de quantité conservées : si f est une fonction de x^+, on a que le courant $f T_{++}$ est conservé, ainsi que la charge $Q_f = \int d\sigma \, f(x^+) T_{++}$, qui redonnent d'ailleurs la conservation de $\dot{X}_R^2$ et $\dot{X}_L^2$. Ces quantités conservées correspondent à une invariance résiduelle, car choisir $h^{\alpha\beta} = \eta^{\alpha\beta}$ ne fixe pas complètement la jauge. Ainsi, la combinaison d'une reparamétrisation et d'une homothétie de Weyl vérifiant $\partial^\alpha \xi^\beta + \partial^\beta \xi^\alpha = \Lambda \eta^{\alpha\beta}$ préserve le choix de jauge. En termes de $\xi^\pm = \xi^0 \pm \xi^1$ cel signifie que ξ^+ peut être une quelconque fonction de σ^+ et ξ^- de σ^-. Cette symétrie résiduelle est exploitée dans la quantification de la corde bosonique.

1.3 Cordes fermés

Les cordes fermées, topologiquement équivalentes à un cercle, ont comme simples conditions aux limites l'égalité $X^\mu(\tau,\sigma) = X^\mu(\tau,\sigma+\pi)$. La solution générale de $\Box X^\mu = 0$ compatible avcec cette condition est $X^\mu = X^\mu_L + X^\mu_R$, où :

$$X^\mu_R = \frac{1}{2}x^\mu + \frac{1}{2}l^2 p^\mu(\tau-\sigma) + \frac{i}{2}l\sum_{n\neq 0}\frac{1}{n}\alpha^\mu_n e^{2in(\tau-\sigma)}$$

$$X^\mu_L = \frac{1}{2}x^\mu + \frac{1}{2}l^2 p^\mu(\tau+\sigma) + \frac{i}{2}l\sum_{n\neq 0}\frac{1}{n}\tilde{\alpha}^\mu_n e^{2in(\tau+\sigma)},$$

où les α^μ_n sont des composantes de Fourier. La longueur fondamentale l a été introduite dans ces équations. Elle est reliée à la tension T par $l = 1/\sqrt{\pi T}$. Quant à x^μ et p^μ, ils peuvent être interprétés comme étant la position et la quantité de mouvement du centre de masse de la corde. On demande que X^μ_R et X^μ_L soient réels, et donc x^μ et p^μ le sont, et de plus on a $\alpha^\mu_{-n} = \alpha^{\dagger\mu}_n$ et $\tilde{\alpha}^\mu_{-n} = \tilde{\alpha}^{\dagger\mu}_n$.

Il est nécessaire par ailleurs de déterminer les différents crochets de Poisson[1] en vue de la quantification. De l'expression de l'action on déduit imméditatement

$$\{X^\mu(\sigma), X^\nu(\sigma')\} = \{\dot{X}^\mu(\sigma), \dot{X}^\nu(\sigma')\} = 0,$$
$$\{\dot{X}^\mu(\sigma), X^\nu(\sigma')\} = T^{-1}\,\delta(\sigma-\sigma')\eta^{\mu\nu}.$$

ce qui permet d'obtenir

$$\{\alpha^\mu_m, \alpha^\nu_n\} = \{\tilde{\alpha}^\mu_m, \tilde{\alpha}^\nu_n\} = im\,\delta_{m+n}\,\eta^{\mu\nu},$$
$$\{\alpha^\mu_m, \tilde{\alpha}^\nu_n\} = 0.$$

Les expressions des crochets de Poisson des différents coefficients de Fourier restent valides pour $n = 0$ ou $m = 0$ si on pose par convention $\tilde{\alpha}^\mu_0 = \alpha^\mu_0 = \frac{1}{2}lp^\mu$. Par ailleurs, on obtient le crochet de Poisson $\{p^\mu, x^\nu\} = \eta^{\mu\nu}$, en sorte qu'il s'agit bien de variables conjuguées, comme souhaité pour ce qu'on a interprété comme étant la position et la quantité de mouvement du centre de masse de la corde. On verra plus bas qu'en fait p^μ est bien égal à la quantité de mouvement totale P^μ de la corde.

La convention précédente permet alors d'écrire simplement :

$$2\partial_- X^\mu_R = l\sum_{-\infty}^{\infty}\alpha^\mu_n e^{-2in(\tau-\sigma)}$$

$$2\partial_+ X^\mu_L = l\sum_{-\infty}^{\infty}\tilde{\alpha}^\mu_n e^{-2in(\tau+\sigma)},$$

où l'on voit bien que les deux modes de propagation sont indépendants l'un de l'autre.

[1] Le crochet de Poisson $\{f,g\}$ est égal par définition à $\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial p} - \frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial g}{\partial x}$, où x et p sont conjuguées. Il faut faire attention au fait que la quantification s'effectuant en remplaçant les crochets de Poisson $\{f,g\}$ par les commutateurs $[f,g]$, l'expression $\{f,g\}$ signifie alors autre chose, à savoir l'anticommutateur de f et g.

1.4 Cordes ouvertes

La condition aux limites de la corde ouverte, écrite plus haut, donne $X'^\mu = 0$ pour $\sigma = 0$ et $\sigma = \pi$, c'est-à-dire que la dérivée normale de X^μ doit s'annuler aux extrémités de la corde. La solution générale de l'équation d'onde $\Box X^\mu = 0$ s'écrit avec ces conditions :

$$X^\mu(\sigma, \tau) = x^\mu + l^2 p^\mu \tau + il \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \alpha_n^\mu \, e^{-in\tau} \cos n\sigma.$$

Ainsi, les conditions aux limites imposent aux deux composantes droite et gauche à se combiner en une onde stationnaire, contrairement à ce qui se passe dans le cas d'une corde fermée. En particulier,

$$2\partial_\pm X^\mu = \dot{X}^\mu \pm X'^\mu = l \sum_{-\infty}^{\infty} \alpha_n^\mu \, e^{-in(\tau \pm \sigma)},$$

où on a posé par convention $\alpha_0^\mu = lp^\mu$.

1.5 Invariance de Poincaré, quantité de mouvement et moment angulaire

Les transformations de Poincaré $\delta X^\mu = a^\mu{}_\nu \, X^\nu + b^\mu$, du point de vue bidimensionnel, sont des symétries globales, et sont donc associées à des courants de Noether, que l'on peut calculer en utilisant la méthode de Noether. Pour calculer le courant de Noether associé à la transformation globale $\phi(\sigma) \to \phi(\sigma) + \epsilon \, \delta\phi(\sigma)$, où $\phi(\sigma)$ est un champ quelconque de la théorie et ϵ un paramètre infinitésimal constant, on considère la transformation

$$\phi(\sigma) \to \phi(\sigma) + \epsilon(\sigma) \, \delta\phi(\sigma),$$

où $\epsilon(\sigma)$ n'est plus constant sur la surface d'univers. L'action S n'est alors plus conservée, mais comme elle le serait pour ϵ constant, sa variation est proportionnelle à la dérivée de ϵ et est donc de la forme générale :

$$\delta S = \int d^2\sigma \, J_\alpha \, \partial^\alpha \epsilon,$$

où J_α est un certain courant. Mais lorsque les équations du mouvement sont vérifiées, $\delta S = 0$ pour toute transformation infinitésimale et en particulier pour la transformation précédente où ϵ dépend de σ. Ceci impose la nullité de l'intégrale précédente dès que les équations du mouvement sont vérifiées, et donc dans ce cas la conservation de J_α : $\partial_\alpha J^\alpha = 0$.

Si on applique cette méthode aux transformations de Poincaré, on obtient deux courants conservés, P_α^μ correspondant à l'invariance par translation, et $J_\alpha^{\mu\nu}$ correspondant à l'invariance lorentzienne :

$$P_\alpha^\mu = T \, \partial_\alpha X^\mu$$

$$J^{\mu\nu}_\alpha = T\,(X^\mu\,\partial_\alpha X^\nu - X^\nu\,\partial_\alpha X^\mu).$$

La conservation de ces courants s'écrit donc :

$$\partial_\alpha P^{\alpha\mu} = \partial_\alpha J^{\alpha\mu\nu} = 0.$$

Ces courants décrivent une densité de quantité de mouvement D-dimensionnelle et une densité de moment angulaire sur la surface d'univers bi-dimensionnelle. La quantité de mouvement totale d'une corde est donnée par l'intégration de P^μ_α sur σ à τ fixé (pris nul, par exemple) :

$$P^\mu = T \int d\sigma\,\frac{dX^\mu(\sigma)}{d\tau} = \pi T(l\alpha^\mu_0 + l\tilde{\alpha}^\mu_0) = p^\mu.$$

Ainsi, p^μ est bien la quantité de mouvement totale de la corde. Par ailleurs, le moment angulaire total est donné de même par :

$$J^{\mu\nu} = T\int_0^\pi d\sigma\,\left(X^\mu \frac{dX^\nu}{d\tau} - X^\nu\frac{dX^\mu}{d\tau}\right).$$

Le calcul donne $J^{\mu\nu} = l^{\mu\nu} + E^{\mu\nu}$ pour les cordes ouvertes et $J^{\mu\nu} = l^{\mu\nu} + E^{\mu\nu} + \tilde{E}^{\mu\nu}$ pour les cordes fermées, où :

$$l^{\mu\nu} = x^\mu p^\nu - x^\nu p^\mu$$
$$E^{\mu\nu} = -i\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(\alpha^\mu_{-n}\alpha^\nu_n - \alpha^\nu_{-n}\alpha^\mu_n),$$

avec une expression similaire pour $\tilde{E}^{\mu\nu}$.

Si on applique la méthode de Noether aux translations infinitésimales $\delta X^\mu = \epsilon^\mu$, le courant conservé correspondant est le tenseur énergie-impulsion, et cette méthode permet de retrouver l'expression donnée plus haut.

1.6 Hamiltonien et opérateurs de Virasoro

Le Hamiltonien H d'une corde est donné en fonction de son Lagrangien L ($S = \int L\,d\sigma$) par :

$$H = \int_0^\pi d\sigma\,\left(\dot{X}\cdot P_\tau - L\right) = \frac{T}{2}\int_0^\pi \left(\dot{X}^2 + X'^2\right)\,d\sigma,$$

ce qui donne pour les cordes fermées

$$H = \frac{1}{2}\sum_{-\infty}^{\infty}\left(\alpha_{-n}\cdot\alpha_n + \tilde{\alpha}_{-n}\cdot\tilde{\alpha}_n\right),$$

et pour les cordes ouvertes

$$H = \frac{1}{2}\sum_{-\infty}^{\infty}\alpha_{-n}\cdot\alpha_n.$$

Le Hamiltonien gouverne l'évolution selon τ du système par l'intermédiaire des crochets de Poisson. Il est sans dimension car on a choisi τ sans dimension.

Considérons maintenant les coefficients de Fourier de la propagation du tenseur $T_{\alpha\beta} = 0$. Evaluées à $\tau = 0$, ils valent dans le cas des cordes fermées :

$$L_m = \frac{T}{2}\int_0^\pi e^{-2im\sigma} T_{--}\, d\sigma = \frac{T}{2}\int_0^\pi e^{-2im\sigma} \dot{X}_R^2\, d\sigma = \frac{1}{2}\sum_{-\infty}^{\infty} \alpha_{m-n}\cdot\alpha_n,$$

$$\tilde{L}_m = \frac{T}{2}\int_0^\pi e^{2im\sigma} T_{++}\, d\sigma = \frac{T}{2}\int_0^\pi e^{2im\sigma} \dot{X}_L^2\, d\sigma = \frac{1}{2}\sum_{-\infty}^{\infty} \tilde{\alpha}_{m-n}\cdot\tilde{\alpha}_n.$$

Ils doivent vérifier, à cause de $T_{\alpha\beta} = 0$, les égalités $L_m - \tilde{L}_m = 0$. Dans le cas des cordes ouvertes, l'astuce permettant de considérer une fonction périodique est d'étendre les définitions de X_R^μ et X_L^μ en posant $X_R(\sigma + \pi) = X_L(\sigma)$ et $X_L(\sigma + \pi) = X_R(\sigma)$. La condition aux limites pour la corde ouverte se traduit alors par la périodicité de la fonction ainsi obtenue, et l'annulation de $T_{\alpha\beta}$ est alors bien équivalente à celle des coefficients :

$$L_m = T\int_0^\pi \left(e^{im\sigma}T_{++} + e^{-im\sigma}T_{--}\right)\, d\sigma = \frac{T}{4}\int_{-\pi}^{\pi} e^{im\sigma}(\dot{X} + X')^2\, d\sigma = \frac{1}{2}\sum_{-\infty}^{\infty} \alpha_{m-n}\cdot\alpha_n.$$

On remarque en particulier que pour les cordes ouvertes on a $H = L_0$ et pour les cordes fermées on a $H = L_0 + \tilde{L}_0$.

Une corde dans un état donné d'oscillation a une masse vérifiant $M^2 = -p_\mu p^\mu$, et la condition $L_0 = 0$ pour le cas d'une corde ouverte ou $L_0 = \tilde{L}_0 = 0$ pour le cas d'une corde fermée permet d'écrire M en fonction des coefficients de Fourier suivant l'équation

$$M^2 = \frac{1}{2l^2}\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{-n}\cdot\alpha_n$$

pour une corde ouverte, et

$$M^2 = \frac{1}{l^2}\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_{-n}\cdot\alpha_n + \tilde{\alpha}_{-n}\cdot\tilde{\alpha}_n)$$

pour une corde fermée. Ces équations sont les équivalents relativistes de l'expression de l'énergie d'une corde de violon en vibration.

Les coefficients de Fourier L_m et $\tilde{L}_m$ sont appelés opérateurs de Virasoro. Les crochets de Poisson de ces opérateurs peuvent être obtenus par un calcul élémentaire mais fastidieux à partir de leur définition. On obtient cependant le résultat simple suivant :

$$\{L_m, L_n\} = i(m-n)L_{m+n},$$

avec le même résultat pour les $\tilde{L}_m$. Cette algèbre à laquelle obéissent les L_m et les $\tilde{L}_m$ est appelée algèbre de Virasoro[2].

[2] Cette algèbre peut s'interpréter facilement comme étant l'algèbre des difféomorphismes infinitésimaux du cercle unité du plan complexe, et c'est là l'origine profonde du caractère angulaire des variables $\sigma^\pm$.

2 Quantification covariante

2.1 Relations de commutation et coefficients de Fourier

On a vu précédemment que, dans le cas classique, la dynamique des cordes bosoniques est donnée par l'expression de l'action

$$S = -\frac{T}{2}\int d^2\sigma\, \partial^\alpha X \cdot \partial_\alpha X,$$

assortie de la condition $(\dot{X} \pm X')^2 = 0$ correspondant à $T_{++} = T_{--} = 0$, et des conditions aux limites adéquates. Par ailleurs, la quantité de mouvement conjuguée à X^μ est $P^\mu_\tau = T\dot{X}^\mu$.

La quantification s'opère en substituant aux crochets de Poisson les commutateurs. On interprète désormais X^μ et P^μ_τ comme des opérateurs vérifiant les relations de commutation suivantes à τ fixé :

$$[P^\mu_\tau(\sigma,\tau), X^\nu(\sigma',\tau)] = -i\delta(\sigma-\sigma')\,\eta^{\mu\nu},$$

$$[X^\mu(\sigma,\tau), X^\nu(\sigma',\tau)] = [P^\mu_\tau(\sigma,\tau), P^\nu_\tau(\sigma',\tau)] = 0.$$

De même, et toujours à τ fixé :

$$[x^\mu, p^\nu] = i\eta^{\mu\nu},$$

$$[\alpha^\mu_m, \alpha^\nu_n] = m\delta_{m+n}\,\eta^{\mu\nu},$$

$$[\alpha^\mu_m, \tilde{\alpha}^\nu_n] = 0,$$

$$[\tilde{\alpha}^\mu_m, \tilde{\alpha}^\nu_n] = m\delta_{m+n}\,\eta^{\mu\nu}.$$

Les α_m sont donc des oscillateurs harmoniques. L'état fondamental $|0\rangle$ est défini comme étant annulé par tous les α_m pour $m > 0$. Cet état a cependant un autre degré de liberté, sa quantité de mouvement : on le note $|0, p^\mu\rangle$.

Les α_m sont reliés aux opérateurs harmoniques normalisés habituels par

$$\alpha^\mu_m = \sqrt{m}\, a^\mu_m \ ; \ \alpha^\mu_{-m} = \sqrt{m}\, a^{\dagger\mu}_m,$$

où les m sont pris ici strictement positifs. Il est fondamental de noter que l'espace de Fock généré par l'application à l'état fondamental des ${a^\dagger}^\mu_m$ n'est pas défini positif, car les composantes temporelles des a_m ont un signe moins inhabituel dans leur relation de commutation : $[a^0_m, a^{\dagger 0}_m] = -1$. Et de ce fait, un état de la forme $a^{\dagger 0}_m|0\rangle$ a une norme négative. L'espace des états physiquement acceptables est donc un sous-espace de l'espace de Fock : il faudra éliminer ces états-fantômes ("ghosts").

On a vu dans le cas classique que la condition supplémentaire à vérifier pour obtenir une corde physiquement acceptable est l'annulation des composantes diagonales de $T_{\alpha\beta}$ et donc des opérateurs de Virasoro. Mais les α_m ne commutent plus, et il faut donc lever des ambiguités dans l'expression de ces opérateurs. Cependant, puisque α_{m-n} commute avec α_n sauf dans le cas $m = 0$, on s'aperçoit que le seul problème est dans l'expression de

L_0. Puisque pour le moment on n'a aucune raison de choisir L_0 d'une manière ou d'une autre, on le définit comme étant ce qu'on obtient en ordonnant normalement[3] les termes :

$$L_0 = \frac{1}{2}\alpha_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{-n}.\alpha_n.$$

Puisqu'une constante arbitraire quelconque aurait pu être ajoutée à cette expression, la condition d'annulation de L_0, qui donnait classiquement la condition sur la masse M de la corde, s'écrit $(L_0 - a)|0\rangle = 0$ (avec en plus $(\tilde{L}_0 - a)|0\rangle = 0$ pour une corde fermée), où a est une constante indéterminée pour l'instant. En choisissant un système d'untités où $l = 1$ la condition quantique sur la masse s'écrit alors pour une corde ouverte :

$$M^2 = -2a + 2\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{-n}.\alpha_n,$$

et pour une corde fermée

$$M^2 = -8a + 8\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{-n}.\alpha_n = -8a + 8\sum_{n=1}^{\infty} \tilde{\alpha}_{-n}.\tilde{\alpha}_n.$$

On voit alors que l'état fondamental a le carré de sa masse égal à $-2a$ (respectivement $-8a$), et que les excitations de ce fondamental ont le carré de leur masse supérieur d'un multiple de 2 (respectivement 8). Les deux fondamentaux sont donc des tachyons.

L'élimination des états non physiquement acceptables se fait en imposant la condition, plus faible que celle obtenue dans le cas classique, que les états physiques vérifient $L_m|\phi\rangle = 0$ pour $m > 0$, en plus de la condition précédente concernant $m = 0$. En effet, ceci suffit pour assurer que moyennant un réarrangement des termes toute expression de la forme $\langle\chi|L_{n_1}L_{n_2}...L_{n_p}|\psi\rangle$ (où si l'un des n_k est nul il faut remplacer L_0 par $L_0 - a$) est nulle : il suffit de placer les termes de n_k négatifs à gauche, et ils annuleront $\langle\chi|$, alors que ceux de n_k positifs, placés à droite, annuleront $|\psi\rangle$. On peut donc résumer la condition d'acceptabilité physique par ce qu'on appelle les conditions de Virasoro :

$$\forall m \geq 0, \quad (L_m - a\delta_m)\,|\psi\rangle = 0$$

[3]Ordonner normalement la somme sur $\mathbb{Z}$ d'un produit de la forme $\sum u_{-n}u_n$ où $[u_{-n}, u_n] \neq 0$, c'est sommer séparément les contributions de $-\mathbb{N}$ et de $\mathbb{N}$, en sommant un terme générique de la forme $u_{-n}u_n$. Pour indiquer qu'une somme est normalement ordonnée, on l'encadre par le symbole " : ". On a à titre d'exemples

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} : u_{-n}u_n : = u_0^2 + 2\sum_{n=1}^{\infty} u_{-n}u_n,$$

ou encore

$$: e^{\sum_{n=-\infty}^{\infty} u_n} : = e^{\sum_{n=1}^{\infty} u_{-n}} e^{u_0} e^{\sum_{n=1}^{\infty} u_n}.$$

Le calcul montre par exemple que si $[u_{-n}, u_n] = n$, la première somme normalement ordonnée diffère de la somme non normalement ordonnée $\sum_{n=-\infty}^{\infty} u_{-n}u_n$ de la somme divergente $\sum_{n=1}^{\infty} n$

2.2 Algèbre de Virasoro et états physiquement acceptables

Les opérateurs de Virasoro obéissent à l'algèbre de Virasoro définie par $[L_m, L_n] = (m-n)L_{m+n}$, à une éventuelle correction quantique près dans le cas où $m+n=0$. Une telle correction a dans le cas le plus général la forme d'une fonction de m. On obtient donc finalement

$$[L_m, L_n] = (m-n)L_{m+n} + A(m)\delta_{m+n},$$

où $A(m)$ est un complexe dépendant de m. L'algèbre ainsi obtenue est appelée extension centrale de l'algèbre de Virasoro, et $-A(m)$ l'anomalie de cette algèbre. On a trivialement $A(m) = A(-m)$ et $A(0) = 0$, et il suffit donc de déterminer $A(m)$ pour $m > 0$. En utilisant l'identité de Jacobi $[L_{[k}, [L_n, L_{m]}]] = 0$ on obtient

$$(n-m)A(k) + (m-k)A(n) + (k-n)A(m) = 0.$$

On choisit $k = 1$ et $m = -n-1$ et on obtient :

$$A(n+1) = \frac{(n+2)A(n) - (2n+1)A(1)}{n-1}.$$

La forme générale de la solution de cette récurrence est

$$A(m) = c_3 m^3 + c_1 m.$$

La détermination des constantes se fait en écrivant d'abord pour $m = 1$

$$\langle 0;0|[L_1, L_{-1}]|0;0\rangle = 0$$

puis pour $m = 2$

$$\langle 0;0|[L_2, L_{-2}]|0;0\rangle = \frac{1}{4}\langle 0;0|\alpha_1 \cdot \alpha_1\, \alpha_{-1} \cdot \alpha_{-1}|0;0\rangle = \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\eta^{\mu\nu} = \frac{1}{2}D.$$

On obtient alors pour $A(m)$:

$$A(m) = \frac{1}{12}D(m^3 - m).$$

Il nous faut éliminer les états non physiquement acceptables en déterminant les valeurs de a et de D pour lesquelles il n'y a pas d'état de norme négative. Quant on fait varier ces deux paramètres d'une région où l'espace de Fock est positif vers une région où il contient des états de norme négative, on a, pour les valeurs frontières, des états de norme nulle supplémentaires qui s'avèreront physiquement très intéressants. Nous étudierons le cas des cordes ouvertes, mais le cas des cordes fermées est similaire, avec dédoublement des α_m et des conditions de Virasoro.

Notons comme précédemment $|0,k\rangle$ l'état fondamental de la corde ouverte de quantité de mouvement k^μ. Considérons les états au premier niveau d'excitation. Ce sont les $\zeta.\alpha_{-1}\,|0,k\rangle$, où $\zeta^\mu(k)$ est un vecteur de polarisation à D composantes indépendantes avant fixation de la jauge. La condition sur la masse s'écrit pour ces états $\frac{1}{2}l^2k^2 = a - 1$, et la condition de nullité de L_1 donne $\zeta.k = 0$. Cette condition laisse seulement $D-1$ composantes indépendantes pour la polarisation. La norme de l'état considéré est $\zeta.\zeta$. Si on choisit k tel que seuls ses deux premières composantes sont non nulles, on obtient un espace à $D-2$ dimensions de polarisations vérifiant toutes $\zeta^0 = 0$ et correspondant à des états ayant manifestement des normes positives. Il reste donc une seule dimension de l'espace des polarisations à étudier. Si a est tel que le premier état excité est un tachyon (i.e. $a > 1$), k peut être choisi comme vérifiant $k^0 = 0$, et le ζ restant correspond alors à un état de norme négative. Si à l'inverse $a < 1$, k vérifie $k^0 \neq 0$ et donc $\zeta^0 = 0$, ce qui donne que le dernier ζ correspond à un état de norme positive. Dans le cas où $k^2 = 0$, ζ est proportionnel à k et est donc de norme nulle. On a donc comme première condition pour l'absence d'états de norme négative la condition $a \leq 1$.

Dans le cas limite $a = 1$, qui s'avère être le seul acceptable, les particules obtenues au premier état d'excitation sont donc une particule vectorielle de masse nulle avec $D-2$ polarisations transverses lui conférant une norme non nulle et une particule de polarisation longitudinale de norme nulle qui ne se propage pas, et que l'on élimine donc. L'état fondamental, scalaire, est un tachyon.

A ce stade, on ne peut montrer que la dimension D doit être égale à 26, mais on peut exhiber des arguments qui rendent cette condition naturelle. Tout d'abord, considérons un état de la forme

$$\left(L_{-2} + \frac{3}{2}L_{-1}^2\right)|0,p\rangle = \left(\frac{1}{2}\alpha_{-1}.\alpha_{-1} + \frac{5}{2}p.\alpha_{-2} + \frac{3}{2}(p.\alpha_{-1})^2\right)|0,p\rangle;$$

où $p^2 = -2$. Cet état a pour norme $\frac{1}{2}(D-26)$, qui s'annule pour $D = 26$, créant un état de norme nulle supplémentaire. Cet état est un exemple de toute une famille d'états que l'on peut construire et qui ont la même propriété. Il n'est pas gênant que ces états soient de norme négative pour $D < 26$ car dans ce cas ils ne vérifient pas les conditions pour être des états physiques. Par ailleurs, il est possible de construire des états de norme négative pour $D > 26$: il en est ainsi d'états de la forme

$$|\phi\rangle = (c_1\,\alpha_{-1}.\alpha_{-1} + c_2\,p.\alpha_{-2} + c_3(p.\alpha_{-1})^2|0,p\rangle,$$

vérifiant $p^2 = -2$ en sorte que $(L_0 - 1)|\phi\rangle = 0$, et où les conditions d'annulation par L_1 et L_2 imposent pour obtenir un état physique les conditions

$$c_2 = c_1\frac{D-1}{5}\ ,\ c_3 = c_1\frac{D+4}{10}.$$

Dans ce cas, la norme de ϕ est

$$\langle\phi|\phi\rangle = \frac{2c_1^2}{25}(D-1)(26-D),$$

qui donne donc des états non physiques pour $D > 26$.

On a donc simplement prouvé $D \leq 26$ et $a \leq 1$. En réalité la condition d'absence d'états non physiques est $a = 1$ et $D = 26$ ou $a \leq 1$ et $D \leq 25$. La présence de nombreux états de norme nulle pour $a = 1$ et $D = 26$ tend à faire penser que dans ce cas la théorie comporte une invariance de jauge plus grande et donc que la théorie est plus intéressante. En réalité, on peut montrer que ce choix est nécessaire.

2.3 Opérateurs de vertex

On ne considère dans cette section que le cas des cordes ouvertes. Une interaction fondamentale peut être alors considérée comme un processus au cours duquel une corde ouverte se scinde en deux ou au contraire deux cordes ouvertes se joignent en une seule. Le but de cette partie n'étant pas d'étudier les interactions entre cordes ouvertes, mais d'introduire les opérateurs de vertex afin d'étudier le spectre de la théorie bosonique, il n'est utile que de considerer le cas où l'une des trois cordes impliquées est réelle et non virtuelle, c'est-à-dire état propre pour la masse.

Une transition d'une corde d'un état vers un autre avec émission d'une autre corde non virtuelle doit vraisemblablement pouvoir être représenté par un opérateur linéaire local dépendant des proporiétés de la corde émise. On suspecte alors la possibilité d'associer à chaque état non virtuel $|\phi\rangle$ de la corde un opérateur V_ϕ d'émission, appelé opérateur de vertex. La détermination de ces opérateurs va donc nous permettre de décrire le spectre de la corde ouverte.

L'émission d'une corde se faisant à une extrémité, et celle-ci pouvant être choisie arbitrairement, on considère un opérateur $A(\tau) = A(0, \tau)$ donné en fonction de $A(0)$ par le Hamiltonien $L_0 - a$ de la corde :

$$A(\tau) = e^{i\tau L_0} A(0) e^{-i\tau L_0}.$$

On est interessé par des opérateurs transformés en eux-même par l'algèbre de Virasoro.

On dit que $A(\tau)$ a la dimension conforme J si un changement de variables $\tau \to \tau'(\tau)$ transforme $A(\tau)$ selon :

$$A'(\tau') = \left(\frac{d\tau}{d\tau'}\right)^J A(\tau),$$

ce qui dans le cas d'une transformation infinitésimale $\delta\tau = \epsilon(\tau)$ donne

$$\delta A(\tau) = -\epsilon \frac{dA}{d\tau} - J\, A \frac{d\epsilon}{d\tau}.$$

Les L_m génèrent des transformations de ce type avec $\epsilon = ie^{im\tau}$, et la condition que doit satisfaire $A(\tau)$ pour avoir la dimension conforme J est donc

$$[L_m, A(\tau)] = e^{im\tau} \left(-i\frac{d}{d\tau} + mJ\right) A(\tau),$$

ou en fonction des coefficients de Fourier A_m de A ($A(\tau) = \sum_{-\infty}^{\infty} A_m e^{-im\tau}$) :

$$[L_m, A_n] = (m(J-1) - n)\, A_{m+n},$$

qui est compatible avec l'identité de Jacobi et l'algèbre de Virasoro. Cette définition donne par exemple le fait que $X^\mu(\tau)$ est de dimension conforme nulle alors que $\dot{X}^\mu(\tau)$ est de dimension conforme égale à 1. Naturellement, tout opérateur n'a pas forcément de dimension conforme définie. L'intérêt de cette notion est que si $A(\tau)$ est de dimension 1, $[L_m, A_0] = 0$, et donc si $|\phi\rangle$ est un état physique (i.e. $(L_n - a\delta_n)|\phi\rangle = 0$ pour $n \geq 0$), alors $|\phi'\rangle = A_0|\phi\rangle$ est aussi un état physique. Les opérateurs de vertex doivent donc probablement être de dimension conforme égale à 1.

L'opérateur de vertex $V(k,\tau)$ d'émission à la date τ et en $\sigma = 0$ d'un état physique de quantité de mouvement $-k^\mu$ ou d'absorbtion d'un état physique de quantité de mouvement k^μ doit, entre autres, changer la quantité de mouvement de la corde sur laquelle il agit de la valeur k^μ. Donc sa dépendance en la position du centre de masse de la corde doit être un facteur $e^{ik\cdot x(\tau)}$, où $x^\mu(\tau) = x^\mu + p^\mu\tau$ est la position du centre de masse de la corde à la date τ. La manière la plus naturelle de réaliser ceci est d'introduire dans l'opérateur $V(k,\tau)$ un facteur $e^{ik\cdot X(0,\tau)}$. Si la corde émise ou absorbée n'a pas de nombre quantique autre que sa quantité de mouvement, il est naturel d'essayer simplement (l'ordonnancement normal est nécessaire) :

$$V(k,\tau) = :e^{ik\cdot X(0,\tau)}: = e^{k\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha_{-n}}{n}e^{in\tau}}e^{ik\cdot x(\tau)}e^{-k\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha_n}{n}e^{-in\tau}}.$$

Il nous faut alors déterminer est la dimension conforme de cet opérateur. Un calcul peu constructif donne le résultat $J = \frac{1}{2}k^2$. On a donc $J = 1$ pour $k^2 = 2$, qui donne l'opérateur de vertex pour l'émission d'un état fondamental tachyonique. Le seul cas où $V(k,\tau)$ ne nécessite pas d'ordonnancement normal est le cas $k^2 = 0$, qui donne $J = 0$. La condition $k^2 = 0$ est celle qu'il faut pour un état sans masse vectoriel, mais la dimension conforme n'est pas la bonne. Cependant le produit de deux opérateurs de dimension conforme définie est manifestement la somme des dimensions conforme des facteurs, à condition que le produit considéré ne nécessite pas d'ordonnancement normal (la définition des deux facteurs peut évidemment nécessiter un tel ordonnancement). Donc puisque $\dot{X}^\mu$ est de dimension conforme 1, on est tenté d'interpréter

$$V_\zeta(k,\tau) = \zeta\cdot\frac{dX}{d\tau}e^{ik\cdot X}$$

comme l'opérateur de vertex pour l'émission d'un tel état, avec une polarisation ζ^μ. Il faut cependant ajouter la condition $k\cdot\zeta = 0$ pour que le produit de $V_\zeta(k,\tau) = \zeta\cdot\frac{dX}{d\tau}$ par $e^{ik\cdot X}$ soit défini sans ambiguité.

Les opérateurs de vertex pour des états de masse plus élevée sont plus complexes. On peut cependant montrer que les opérateurs de vertex correspondant aux états deux fois excités ($k^2 = -2$) sans masse sont les opérateurs $\zeta^{\mu\nu}\dot{X}_\mu\dot{X}_\nu :e^{ik\cdot X}:$, qui vérifie $J = 1$ si $k_\mu\zeta^{\mu\nu} = \mathrm{tr}\zeta = 0$, qui sont les conditions pour que ζ soit le tenseur de polarisation d'un état massif de spin 2 (i.e. un tenseur symétrique de trace nulle de $SO(D-1) = SO(25)$).

Chapitre 2

Introduction aux supercordes

La corde bosonique décrite précédemment, en dépit de ses atouts, n'est pas totalement satisfaisante, ne serait-ce que par l'absence de fermions et la présence de tachyons. L'idée pour remédier à ces limitations est d'introduire de nouveaux degrés de liberté se propageant sur la corde. Ce chapitre décrit la supercorde obtenue en introduisant sur la surface d'univers une supersymétrie reliant les coordonnées d'espace-temps $X^\mu(\sigma,\tau)$ à des partenaires fermioniques $\psi^\mu(\sigma,\tau)$ dont la nature est décrite ci-dessous. Il se trouve que la théorie ainsi obtenue se place dans un espace à 10 et non plus 26 dimensions.

1 Théorie classique

Le principe est donc d'introduire de nouveaux degrés de liberté de la corde qui se propagent le long de celle-ci, sous la forme de champs fermioniques de la forme $\psi_A(\sigma,\tau)$, où, en dimension 2 comme ici (sur la surface d'univers décrite par la corde), A prend deux valeurs si les deux chiralités sont incluses (i.e. si le spineur n'est pas de Weyl). Il s'agit alors de savoir si ψ est un spineur de Dirac ou de Majorana, et le nombre qu'il convient d'en introduire. En réalité, peu de choix conduisent à une théorie physiquement intéressante. L'un d'entre eux est d'introduire un D-uplet de spineurs de Majorana $\psi^\mu_A(\sigma,\tau)$, qui se transforme comme un vecteur de l'espace-temps.

On considère donc l'action suivante :

$$S = \frac{1}{2\pi}\int d^2\sigma\ \left(\partial_\alpha X^\mu\,\partial^\alpha X_\mu - i\bar{\psi}^\mu\,\rho^\alpha\,\partial_\alpha\psi_\mu\right).$$

On a, puisque les ψ^μ sont des spineurs de Majorana, $\bar{\psi}^\mu = {}^t\psi^\mu\rho^0$. Par ailleurs, le symbole ρ^α désigne les matrices de Dirac en deux dimensions dans une représentation de Majorana, dont une base est par exemple :

$$\rho^0 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\ ,\ \rho^1 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

On note $+$ et $-$ les indices de chiralité :

$$\psi^\mu = \begin{pmatrix} \psi^\mu_- \\ \psi^\mu_+ \end{pmatrix}.$$

1.1 Supersymétrie globale de la surface d'univers

Bien que la jauge de notre action ait été fixée, elle est encore invariante sous la transformation globale suivante, où ϵ est un spineur de Majorana infinitésimal constant :

$$\delta X^\mu = \bar{\epsilon}\psi^\mu \ ; \ \delta\psi^\mu = i\rho^\alpha \,\partial_\alpha X^\mu \,\epsilon.$$

Ces transformations sont appelées transformations supersymétriques, car elles mixent les coordonnées bosoniques et fermioniques. Le supercourant[1] conservé correspondant à ces transformations, obtenu par la méthode de Noether (en faisant varier ϵ en fonction de σ) est :

$$J_\alpha = \frac{1}{2}\rho^\beta \rho_\alpha \psi^\mu \,\partial_\beta X_\mu$$

La méthode de Noether appliquée à une translation infinitésimale donne par ailleurs le tenseur énergie-implusion :

$$T_{\alpha\beta} = \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X_\mu + \frac{i}{4}\bar{\psi}^\mu \,\rho_\alpha \,\partial_\beta \psi_\mu + \frac{i}{4}\bar{\psi}^\mu \,\rho_\beta \,\partial_\alpha \psi_\mu - (\text{trace}).$$

Ce tenseur est de trace nulle, comme dans la théorie purement bosonique. Certaines composantes du supercourant sont aussi annulées à cause de l'égalité $\rho^\alpha J_\alpha = 0$, qui est une conséquence de l'identité $\rho^\alpha \rho^\beta \rho_\alpha = 0$.

1.2 Superespace

L'action précédente est celle d'une théorie bi-dimensionnelle formulée dans un espace bi-dimensionnel ordinaire, la surface d'univers décrite par la corde. Mais la supersymétrie peut être rendue manifeste en formulant la théorie dans un superespace bi-dimensionnel où on ajoute aux deux coordonnées σ^α une coordonnée de Grassmann θ formant un spineur de Majorana à deux composantes θ_A, comme décrit dans le Préliminaire sur la supersymétrie. Les D superchamps Y^μ définis dans le superespace s'écrivent alors[2] :

$$Y^\mu(\sigma,\theta) = X^\mu(\sigma) + \bar{\theta}\,\psi^\mu(\sigma) + \frac{1}{2}\bar{\theta}\theta \,B^\mu(\sigma),$$

qui est le développement complet en série entière selon θ en raison du fait que les propriétés d'anticommutation des θ_A annulent tous les produits de plus de deux d'entre eux.

Voyons comment le superespace rend manifeste la supersymétrie. Le générateur de supersymétrie est ici :

$$Q_A = \frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^A} + i(\rho^\alpha \,\theta)_A \,\partial_\alpha.$$

[1] Qui est donc un vecteur du superespace bi-dimensionnel dont les composantes sont des spineurs de Majorana.

[2] Attention à ne pas confondre l'indice μ du Préliminaire, qui correspond ici à l'indice σ, et l'indice μ du champ Y^μ défini ici, qui exprime simplement qu'il y a autant de composantes de champ définies que de dimensions d'espace-temps.

Sur le superchamp Y^μ, une transformation supersymétrique infinitésimale $\bar{\epsilon}Q$ (où ϵ est comme dans le Préliminaire un spineur de Majorana infinitésimal constant) agit selon

$$\delta Y^\mu = [\bar{\epsilon}Q, Y^\mu] = \bar{\epsilon}QY^\mu.$$

La décomposition de cette égalité en puissances de θ donne les relations de transformations suivantes pour les composantes du superchamp :

$$\delta X^\mu = \bar{\epsilon}\psi^\mu \ ; \ \delta\psi^\mu = i\rho^\alpha\,\partial_\alpha X^\mu\,\epsilon + B^\mu\epsilon \ ; \ \delta B^\mu = -i\bar{\epsilon}\rho^\alpha\,\partial_\alpha\psi^\mu,$$

qui sont bien les relations de transformation du paragraphe précédent si on pose $B^\mu = \rho^\alpha\,\partial_\alpha\psi^\mu = 0$, ce qui correspond au fait que B était absent, et que $\rho^\alpha\,\partial_\alpha\psi^\mu = 0$ était vérifiée car c'est l'équation de Dirac que l'on peut déduire de l'expression de l'action.

Pour construire une action invariante par les transformations supersymétriques, il nous faut définir un opérateur d'intégration sur tout le superespace. Pour cela, il nous faut exprimer l'intégrale de Berezin sur θ (cf. Préliminaires) à l'aide de sa décomposition en deux composantes. L'identité entre intégration sur θ et dérivation formelle par rapport à θ c'est-à-dire ici l'opérateur formel $\frac{\partial}{\partial\theta^1\partial\theta^2}$ donne (en notant $d^2\theta$ la mesure d'intégration pour rappeller qu'on intègre sur deux composantes) :

$$\int d^2\theta\,(a + \theta^1 b_1 + \theta^2 b_2 + \theta^1\theta^2 c) = c,$$

où l'intégrande est bien la fonction de θ la plus générale. L'opérateur d'intégration sur le superespace $\int d^2\sigma\, d^2\theta$ que l'on a alors est invariante par supersymétrie en le sens suivant : si Y est un superchamp,

$$S = \int d^2\sigma\, d^2\theta\, Y$$

est invariant par remplacement de Y par $\bar{\epsilon}QY$ (ceci se montre par intégration par parties de l'expression obtenue en explicitant Q).

La construction de l'action est alors possible. En se souvenant que l'opérateur D de dérivation covariante de superespace est donné par $D_A = \frac{\partial}{\partial\theta^A} - i(\rho^\alpha\,\theta)_A\partial_\alpha$, posons

$$S = \frac{i}{4\pi}\int d^2\sigma\, d^2\theta\, \bar{D}Y^\mu\, DY_\mu.$$

En remplaçant Y par sa décomposition en puissances de θ on obtient après un rapide calcul l'action suivante :

$$S_0 = -\frac{1}{2\pi}\int d^2\sigma(\partial_\alpha X^\mu\,\partial^\alpha X_\mu - i\bar{\psi}^\mu\,\rho^\alpha\,\partial_\alpha\psi_\mu - B^\mu B_\mu).$$

La minimisation de l'action annule B^μ et il est donc légitime de l'oublier. On obtient donc l'action du paragraphe précédent, d'une manière explicitement supersymétrique.

1.3 Equations du mouvement bosoniques et fermioniques

Le but de l'introduction de coordonnées fermioniques était de faire apparaître de nouvelles symétries susceptibles de faire disparaitre les modes non voulus. Pour cela, il faut une symétrie continue, même si la supersyémtrie est un pas dans la bonne direction. Il se trouve que le commutateur de deux générateurs de supersymétrie Q_A est une translation. Or dans la théorie de la corde bosonique, les translations sont généres par les opérateurs de Virasoro L_0 et $\tilde{L}_0$. L'objectif est donc de trouver l'équivalent pour Q_A de ce qu'est l'algèbre complète de Virasoro pour sa sous-algèbre engendrée par L_0 et $\tilde{L}_0$.

Les équations du mouvement déduites de l'action trouvée dans les deux précédents paragraphes sont d'une part l'équation de Dirac bi-dimensionnelle $\rho^\alpha\,\partial_\alpha\psi = 0$ et d'autre part l'équation de Klein-Gordon bi-dimensionnelle $\Box X^\mu = 0$. La première de ces deux équations peut se découpler en deux équations pour les composantes ψ_- et ψ_+ définies plus haut :

$$\left(\frac{\partial}{\partial\sigma} + \frac{\partial}{\partial\tau}\right)\psi_-^\mu = 0$$
$$\left(\frac{\partial}{\partial\sigma} - \frac{\partial}{\partial\tau}\right)\psi_+^\mu = 0.$$

Ainsi, ψ_- et ψ_+ décrivent des modes respectivement droite et gauche découplés. On peut remarquer que ψ_+ et ψ_- sont des états propres de l'opérateur de chiralité bi-dimensionnel $\rho^0\rho^1$, avec pour valeurs propres respectivement -1 et $+1$, c'est à dire que ψ_+ est de chiralité négative et ψ_- de chiralité positive. En posant comme usuellement $\partial_\pm = \frac{1}{2}(\partial_\tau \pm \partial_\sigma)$, la partie fermionique de l'action s'écrit donc :

$$S_F = \frac{i}{\pi}\int d^2\sigma\,(\psi_-\partial_+\psi_- + \psi_+\partial_-\psi_+)$$

(où l'indice μ a été supprimé). Quant à l'équation bosonique, elle s'écrit dans cette base d'une manière rendant explicite la symétrie entre composantes bosoniques et fermioniques :

$$\partial_+(\partial_- X^\mu) = \partial_+\psi_-^\mu = 0$$
$$\partial_-(\partial_+ X^\mu) = \partial_-\psi_+^\mu = 0.$$

On voit clairement que la supersymétrie est issue de ce que d'une part ψ_-^μ et $\partial_- X^\mu$ (qui ne dépendent que de σ^-) et d'autre part ψ_+^μ et $\partial_+ X^\mu$ (qui ne dépendent que de σ^+) obéissent à la même équation.

Le découplage entre modes droite et gauche, i.e. entre composantes de chiralité négative et positive, simiplifie le tenseur d'énergie-impulsion et le supercourant quand ils sont exprimés eux aussi en termes de composantes de chiralité négative et positive. En effet, si on décompose le supercourant $J_{\alpha A}$ en composantes J_{+A} et J_{-A} (A est l'indice spinoriel), la condition $\rho^\alpha J_\alpha = 0$ vue plus haut impose que seule la composante de chiralité positive de J_{+A} et la composante de chiralité négative de J_{-A} sont non nulles. On appelle alors ces deux composantes spinorielles respectivement J_+ et J_-. Elles valent :

$$J_+ = \psi_+^\mu\,\partial_+ X^\mu$$

$$J_- = \psi_-^\mu \, \partial_+ X^\mu,$$

et sont évidemment conservées ($0 = \partial_- J_+ = \partial_+ J_-$). Par ailleurs, dans cette base, les composantes non nulles du tenseur énergie-impulsion s'écrivent :

$$T_{++} = \partial_+ X^\mu \, \partial_+ X_\mu + \frac{i}{2} \psi_+^\mu \, \partial_+ \psi_{+\mu}$$

$$T_{--} = \partial_- X^\mu \, \partial_- X_\mu + \frac{i}{2} \psi_-^\mu \, \partial_- \psi_{-\mu}.$$

Dans le cas de la corde bosonique, on avait comme équations du mouvement $T_{++} = T_{--} = 0$ (conditions de Virasoro). Mais ici, un calcul simple montre que l'algèbre induite par les J_+ et J_- fait intervenir les composantes de T. Par conséquent, on pressent qu'il faut imposer en plus des conditions $T_{++} = T_{--} = 0$ les conditions $J_+ = J_- = 0$. Il se trouve que ces conditions, dites superconditions de Virasoro, peuvent être déduites d'un choix de jauge dans une action de supergravité bi-dimensionnelle, de même que les conditions de Virasoro avaient été déduites d'un choix de jauge pour l'action de la corde bosonique.

1.4 Conditions aux limites et superopéateurs de Virasoro

Les coordonnées bosoniques X^μ vérifient les mêmes équations et conditions aux limites que dans le cas purement bosonique étudié plus haut, avec la distinction entre cordes ouvertes et fermées.

Pour la supercorde ouverte, les coordonnées fermioniques ont comme conditions aux limites la satisfaction à chaque extrémité de l'égalité $\psi_+ \delta \psi_+ - \psi_- \delta \psi_- = 0$, ce qui impose, après avoir fixé par convention $\psi_+^\mu(0, \tau) = \psi_-^\mu(0, \tau)$, de choisir entre les deux conditions suivantes :

- la condition de Ramond (R) $\psi_+^\mu(\pi, \tau) = \psi_-^\mu(\pi, \tau)$, qui donne la décomposition de Fourier suivante pour les coordonnées fermioniques :

$$\psi_-^\mu(\sigma, \tau) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} d_n^\mu \, e^{-in(\tau - \sigma)}$$

$$\psi_+^\mu(\sigma, \tau) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} d_n^\mu \, e^{-in(\tau + \sigma)},$$

- la condition de Neveu-Schwarz (NS) $\psi_+^\mu(\pi, \tau) = -\psi_-^\mu(\pi, \tau)$, qui donne la décomposition de Fourier suivante pour les coordonnées fermioniques :

$$\psi_-^\mu(\sigma, \tau) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}} b_r^\mu \, e^{-in(\tau - \sigma)}$$

$$\psi_+^\mu(\sigma, \tau) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}} b_r^\mu \, e^{-in(\tau + \sigma)}.$$

Les indices m et n sont toujours pris entiers et les indices r et s demi-entiers. Nous verrons plus tard que la condition (R) conduit à des états fermioniques alors que la condition (NS) conduit à des états bosoniques, différents toutefois de ceux vus au chapitre précédent. On parle de secteur fermionique et de secteur bosonique.

Pour des cordes fermées, les conditions aux limites sont tout simplement la périodicité ou l'anti-périodicité de chacune des deux composantes de ψ : on peut avoir

$$\psi_-^\mu = \sum d_n^\mu \, e^{-2in(\tau-\sigma)},$$

ou

$$\psi_-^\mu = \sum b_r^\mu \, e^{-2in(\tau-\sigma)},$$

et par ailleurs

$$\psi_+^\mu = \sum \tilde{d}_n^\mu \, e^{-2in(\tau+\sigma)},$$

ou

$$\psi_+^\mu = \sum \tilde{b}_r^\mu \, e^{-2in(\tau+\sigma)}.$$

Il y a donc quatre secteurs distincts, appelés NS-NS, NS-R, R-NS, et R-R. Le premier et le dernier de ces quatre secteurs s'avèreront décrire des états bosoniques, alors que les deux autres conduisent à des états fermioniques.

Les superopérateurs de Virasoro sont alors les coefficients de Fourier de $T_{\alpha\beta}$ et du supercourant J_α : ce sont tous ces coefficients qu'il faut annuler pour satisfaire les équations du mouvement. Ils s'écrivent dans le cas des cordes ouvertes :

$$L_m = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi d\sigma \, \left(e^{im\sigma}T_{++} + e^{-im\sigma}T_{--}\right) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^\pi d\sigma \, e^{im\sigma}T_{++}$$

pour les coordonnées bosoniques, et pour les coordonnées fermioniques

$$F_m = \frac{\sqrt{2}}{\pi}\int_0^\pi d\sigma \, \left(e^{im\sigma}J_+ + e^{-im\sigma}J_-\right) = \frac{\sqrt{2}}{\pi}\int_{-\pi}^\pi d\sigma \, e^{im\sigma}J_+$$

pour la condition (R), ou

$$G_r = \frac{\sqrt{2}}{\pi}\int_0^\pi d\sigma \, \left(e^{ir\sigma}J_+ + e^{-ir\sigma}J_-\right) = \frac{\sqrt{2}}{\pi}\int_{-\pi}^\pi d\sigma \, e^{ir\sigma}J_+$$

pour la condition (NS). Pour les cordes fermées il y deux ensembles de superopérateurs de Virasoro, l'un donné par la décomposition de T_{++} et de J_+, et l'autre par la décomposition de T_{--} et de J_-. Dans la théorie classique que nous considérons jusqu'à présent, les équations du mouvement sont équivalentes à l'annulation de tous ces superopérateurs. Mais dans le cas quantifié, tout comme pour la corde bosonique, des anomalies apparaissent.

2 Quantification covariante

La quantification que nous allons esquisser s'opère selon le même principe que celle effectuée au chapitre précédent. La nouveauté est l'existence de deux secteurs, fermionique et bosonique, reliés par supersymétrie.

2.1 Relations de commutation et coefficients de Fourier

On a vu que dans la jauge covariante la dynamique des coordonnées $X^\mu(\sigma,\tau)$ et $\psi^\mu(\sigma,\tau)$ est donnée par une équation de Klein-Gordon bi-dimensionnelle et une équation de Dirac auxquelles s'ajoutent certaines contraintes. La quantification de ces coordonnées donne pour les X^μ les mêmes résultats qu'au chapitre précédent, où l'on avait trouvé

$$[\dot{X}^\mu(\sigma,\tau), X^\nu(\sigma',\tau)] = -i\pi\delta(\sigma-\sigma')\,\eta^{\mu\nu}$$

et où l'on en avait déduit

$$[\alpha^\mu_m, \alpha^\nu_m] = m\delta_{m+n}\,\eta^{\mu\nu},$$

avec dans les cas des cordes fermées les mêmes commutateurs pour les coefficients tildés. La quantification des coordonnées fermioniques est relativement simple. Les anticommutateurs des $\psi^\mu_A(\sigma,\tau)$ sont donnés par

$$\{\psi^\mu_A(\sigma,\tau), \psi^\nu_B(\sigma',\tau)\} = \pi\delta(\sigma-\sigma')\,\eta^{\mu\nu}\,\delta_{AB},$$

ce qui donne pour les coefficients de Fourier :

$$\{b^\mu_r, b^\nu_s\} = \eta^{\mu\nu}\,\delta_{r+s}$$

$$\{d^\mu_m, d^\nu_n\} = \eta^{\mu\nu}\,\delta_{m+n}.$$

Ceci, ainsi que ce que nous dirons par la suite, est valable pour les cordes ouvertes et pour le secteur droit des cordes fermées. Il est facile d'obtenir ce qui se passe pour le secteur gauche des cordes fermées en tildant convenablement les relations.

La contrainte de Virasoro L_0 donne la condition sur la masse (on choisit des unités où $T = 1/\pi$) :

$$\frac{1}{2}M^2 = N + \text{constante},$$

où la constante est dûe à des effets de non commutation (correspondant à l'introduction du paramètre a dans le cas de la corde bosonique), et où l'on a $N = N^\alpha + N^d$ ou $N = N^\alpha + N^b$ suivant le type de conditions aux limites choisi, avec

$$N^\alpha = \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_{-m}.\alpha_m$$

$$N^d = \sum_{m=1}^{\infty} m\, d_{-m}.d_m$$

$$N^b = \sum_{r=\frac{1}{2}}^{\infty} r\, b_{-r}.b_r.$$

L'état tel que M^2 est minimal correspond à l'état fondamental de l'espace de Fock, et vérifie pour m (et éventuellement r) > 0 :

$$\alpha^\mu_m|0\rangle = d^\mu_m|0\rangle = 0$$

ou

$$\alpha^\mu_m|0\rangle = b^\mu_r|0\rangle = 0.$$

Une excitation par l'un des opérateurs α^μ_{-m} ou d^μ_{-m} augmente $\frac{1}{2}M^2$ de m, et une excitation par b^μ_{-r} l'augmente de r.

Dans le cas (NS) (oscillations demi-entières), il est possible de choisir un état fondamental non-dégénéré, de spin nul : les cordes obtenues avec la condition de Neveu-Schwarz sont des cordes bosoniques. Dans le cas (R) ce n'est pas possible à cause des oscillateurs d^μ_0. Les d^μ_0 engendrent l'algèbre

$$\{d^\mu_0, d^\nu_0\} = \eta^{\mu\nu}$$

qui est l'algèbre de Clifford (et donc les d^μ_0 sont proportionnels aux matrices de Dirac). Les états fondamentaux dans le cas (R), mais aussi l'ensemble des états de même masse dans un cas donné doivent d'après les anticommutateurs donnés plus haut fournir des représentations de cette algèbre. Dans le cas des états fondamentaux de (R) il doit s'agir d'une représentation irréductible, puisqu'il n'y a pas d'autres modes de masse nulle qui puissent donner une dégénérescence. Or les représentations irréductibles de l'algèbre de Clifford correspondent à des spineurs. On voit donc que les cordes obtenues avec la condition de Ramond sont des cordes fermioniques.

De même que dans le cas bosonique, la méthode de Noether permet à partir des transformations de Poincaré de calculer les densités de quantité de mouvement et de moment angulaire le long de la corde. On trouve :

$$P^\mu_\alpha = \frac{1}{\pi}\partial_\alpha X^\mu$$

$$J^{\mu\nu}_\alpha = \frac{1}{\pi}\left(X^\mu\,\partial_\alpha X^\nu - X^\nu\,\partial_\alpha X^\mu + i\bar{\psi}^\mu\rho_\alpha\psi^\nu\right).$$

2.2 Superalgèbre de Virasoro et états physiquement acceptables

Il s'avère simplificateur de remplacer linéairement les L_m par $L_m = L^{(\alpha)}_m + L^{(b)}_m$ ou $L_m = L^{(\alpha)}_m + L^{(d)}_m$ suivant le cas, où l'on a posé

$$L^{(\alpha)}_m = \frac{1}{2}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \alpha_{-n}.\alpha_{m+n},$$

et, suivant le cas,

$$L^{(b)}_m = \frac{1}{2}\sum_{r\in\mathbb{Z}+\frac{1}{2}} \left(r + \frac{1}{2}m\right) b_{-r}.b_{m+r},$$

ou

$$L^{(d)}_m = \frac{1}{2}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \left(n + \frac{1}{2}m\right) b_{-r}.b_{m+r}.$$

Cependant, le cas $m = 0$ pose le même problème que dans le cas purement bosonique, dû à la non-nullité du commutateur de deux oscillateurs ayant même indice inférieur, et il faudra calculer l'anomalie correspondante de la même manière. On choisit par convention de sommer en ordonnant normalement les termes, ce qui fixe les opérateurs et les termes d'anomalie. Les correspondant fermioniques des opérateurs de Virasoro sont quant à eux définis sans problème par (suivant le cas) :

$$G_r = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_{-n}.b_{r+n}$$

$$F_m = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_{-n}.d_{m+n}.$$

L'anomalie signalée impose, dans l'écriture de la superalgèbre de Virasoro correspondant à chacun des deux types de conditions aux limites, de faire apparaître des termes supplémentaires comme dans le cas purement bosonique.

On obtient pour le secteur bosonique (NS) la superalgèbre de Virasoro suivante :

$$[L_m, L_n] = (m-n)L_{m+n} + A(m)\delta_{m+n}$$

$$[L_m, G_r] = \left(\frac{1}{2}m - r\right) G_{m+r}$$

$$\{G_r, G_s\} = 2L_{r+s} + B(r)\delta_{r+s}$$

Des arguments similaires à ceux utilisés dans le cas purement bosonique donnent pour les termes d'anomalies :

$$A(m) = \frac{1}{8}D\left(m^3 - m\right)$$

$$B(m) = \frac{1}{2}D\left(r^2 - \frac{1}{4}\right).$$

Pour le secteur fermionique (R), la superalgèbre de Virasoro est similaire :

$$[L_m, L_n] = (m-n)L_{m+n} + A(m)\delta_{m+n}$$

$$[L_m, F_n] = \left(\frac{1}{2}m - n\right) F_{m+n}$$

$$\{F_m, F_n\} = 2L_{m+n} + B(m)\delta_{m+n}$$

avec pour les termes d'anomalie :

$$A(m) = \frac{1}{8}Dm^3$$

$$B(m) = \frac{1}{2}Dm^2.$$

Considérons le secteur bosonique. De manière analogue à ce qui se passait dans le chapitre précédent, un état bosonique $|\phi\rangle$ est physiquement acceptable s'il satisfait les contraintes suivantes :

$$G_r|\phi\rangle = 0 \qquad r > 0$$

$$L_n|\phi\rangle = 0 \qquad n > 0$$

$$(L_0 - a)|\psi\rangle = 0,$$

où a est une constante d'anomalie encore à déterminer. On peut remarquer que la structure de la superalgèbre suffit, dès que l'on a $G_{1/2}|\psi\rangle = G_{3/2}|\psi\rangle = 0$, à assurer l'ensemble infini de conditions des deux premières lignes ci-dessus. Exactement comme au chapitre précédent, nous allons chercher les valeurs limites de D et a faisant apparaître de nombreux états supplémentaires de norme nulle sans toutefois faire apparaître d'états non physiquement acceptables. L'état fondamental $|0, k\rangle$ vérifie la condition avec L_0 pour $k^2/2 = a$, et donc l'état une fois excité $G_{-1/2}|0, k\rangle$ la vérifie pour $a = 1/2$. Par ailleurs, si $a = 1/2$, la condition d'annulation par $G_{1/2}$ est vérifiée, et l'état est donc physique et de norme nulle. Si a est plus grand, la norme est négative. La valeur frontière, correspondant à $a = 1$ dans le cas purement bosonique, est donc $a = 1/2$. Soit alors, en vue de déterminer la dimension critique, la famille d'états

$$|\phi\rangle = (G_{-3/2} + \lambda G_{-1/2} L_{-1})|\tilde{\phi}\rangle,$$

où $|\tilde{\phi}\rangle$ vérifie

$$G_{1/2}|\tilde{\phi}\rangle = G_{3/2}|\tilde{\phi}\rangle = (L_0 + 1)|\tilde{\phi}\rangle = 0.$$

En utilisant la superalgèbre de Virasoro, on obtient pour ces états :

$$G_{1/2}|\phi\rangle = (2 - \lambda)L_{-1}|\tilde{\phi}\rangle$$

$$G_{3/2}|\phi\rangle = (D - 2 - 4\lambda)|\tilde{\phi}\rangle.$$

Ainsi, $|\phi\rangle$ est physique pour $\lambda = 2$ et $D = 10$, qui est donc la dimension critique.

Considérons maintenant le secteur fermionique. Un état fermionique $|\psi\rangle$ est physiquement acceptable s'il satisfait les contraintes suivantes :

$$F_n|\psi\rangle = 0 \qquad n \geq 0$$

$$L_n|\psi\rangle = 0 \qquad n > 0$$

avec le fait que $F_0^2 = L_0$ impose alors $L_0|\phi\rangle = 0$. Il n'y a donc pas de constante d'anomalie puisque pour F_0 il n'y a pas de difficulté de définition. Considérons alors des états de la forme

$$|\psi\rangle = F_0 F_{-1}|\tilde{\psi}\rangle,$$

où $|\tilde{\psi}\rangle$ vérifie :

$$F_1|\tilde{\psi}\rangle = (L_0 + 1)|\tilde{\psi}\rangle = 0.$$

On remarque d'une part que l'annulation de L_1 et de F_0 suffit à assurer qu'un état est physique, et d'autre part que $F_0|\psi\rangle$ est clair. L'état $|\psi\rangle$ est donc physique et de norme nulle s'il est aussi annulé par L_1. Or le calcul donne :

$$L_1|\psi\rangle = \left(\frac{1}{4}D - \frac{5}{2}\right)|\tilde{\psi}\rangle.$$

Ainsi, $D = 10$ est aussi la dimension critique du secteur fermionique.

2.3 Opérateurs de vertex pour émission de bosons

L'idée générale pour construire le spectre de la théorie en l'état où elle est à ce stade est la même que pour le cas purement bosonique. Trois cas sont cependant ici à considérer : l'émission d'un état bosonique par une corde bosonique, l'émission d'une corde fermionique par une corde bosonique qui devient fermionique, et l'émission d'une corde bosonique par une corde fermionique qui devient bosonique. Nous n'avons besoin pour construire le spectre de la théorie – et nous nous y limiterons donc – que d'étudier le premier de ces cas.

On a vu au chapitre précédent qu'un opérateur de vertex doit avoir une dimension conforme J égale à 1. C'est naturellement encore le cas ici, mais de plus on doit avoir les bonnes relation de commutation avec les G_r, pour former à partir d'états physiques des états physiques. Considérons un candidat au statut d'opérateur de vertex, V, pris en $\tau = 0$. Supposons qu'il existe un autre opérateur W tel que $\forall r \in \mathbb{Z} + 1/2$ on ait $V = [G_r, W]$. On remarque que l'on restreint les choix possibles pour W en demandant que V soit indépendant de r. Cette condition est adaptée quand W est un opérateur bosonique, mais quand W est fermionque il faut remplacer le commutateur par l'anticommutateur. Puisque $G_r^2 = L_{2r}$, on en déduit

$$\{G_r, V\} = [L_{2r}, W].$$

En se rappelant que $V(\tau) = e^{iL_0\tau}\, V\, e^{-iL_0\tau}$ et que pour un opérateur de dimension conforme J on a

$$[L_m, V(\tau)] = e^{im\tau}\left(-i\frac{d}{d\tau} + mJ\right)V(\tau),$$

il est aisé de voir que V a pour dimension conforme 1 seulement si W a pour dimension conforme 1/2. Or le cas de l'état bosonique fondamental est le cas $k^2 = 1$, et donc l'opérateur

$$W = :e^{ik\cdot X(0)}:$$

convient. L'opérateur de vertex associé est

$$V = [G_r, W] = k\cdot\psi(0) :e^{ik\cdot X(0)}:,$$

et donc

$$V(\tau) = k\cdot\psi(\tau) :e^{ik\cdot X(\tau)}:,$$

où l'on a posé

$$\psi^\mu(\tau) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{-\infty}^{\infty} b_r^\mu e^{-ir\tau}.$$

On remarque que V est bien de dimension conforme 1 puisque chaque facteur est de dimension conforme 1/2 et qu'ils commutent. C'est donc un opérateur de vertex adapté pour l'émission de l'état bosonique fondamental qui est un tachyon.

Le premier état excité est un état vectoriel sans masse, de polarisation ζ^μ et d'impulsion k^μ, décrit par $\zeta \cdot b_{-1/2}|0, k\rangle$. La condition d'annulation de $G_{1/2}$ impose $\zeta \cdot k = 0$. Pour construire l'opérateur de vertex d'émission de cet état, on considère $W_1 = \zeta \cdot \psi(0) e^{ik \cdot X(0)}$, qui a bien $J = 1/2$ pour $k = 0$ comme requis. L'opérateur de vertex correspondant est

$$V_1 = \{G_r, W_1\} = (\zeta \cdot \dot{X}(0) - \zeta \cdot \psi(0)\, k \cdot \psi(0)) e^{ik \cdot X(0)},$$

qui est indépendant de r comme requis. Le produit d'opérateurs définissant V_1 est défini sans ambiguïté puisque $\zeta \cdot k = 0$.

On s'aperçoit que lorsque le nombre d'excitations ψ^μ est impair, i.e. quand W est bosonique, l'opérateur V est fermionique (au sens bi-dimensionnel) alors qu'il décrit l'émission d'un état bosonique. A l'inverse, lorsque le nombre d'excitations ψ^μ est pair, i.e. quand W est fermionique, l'opérateur V est bosonique, ce qui semble plus naturel. Mais il faut voir que ce caractère fermionique ou bosonique est au sens bi-dimensionnel, et non pas 10-dimensionnel. Cependant, on peut montrer que les opérateurs V fermioniques conduisent à des inconsistances, et c'est pourquoi on est amené à tronquer le spectre.

2.4 Conditions GSO

Le modèle RNS décrit jusqu'ici est en réalité inacceptable, même pour $D = 10$ et $a = \frac{1}{2}$ (ou $a = 0$ pour le secteur fermionique), à moins d'imposer des conditions supplémentaires : il faut tronquer le spectre selon des conditions proposées initialement par Gliozzi, Scherk et Olive, d'où leur nom de conditions GSO. En effet, plusieurs arguments vont dans ce sens. Tout d'abord la présence d'un tachyon, mais aussi le fait que l'opérateur anticommutatif ψ^μ transforme un boson en un boson : si $|\psi\rangle$ est un état bosonique, alors l'état

$$\psi^{\mu_1}(\sigma_1)\, \psi^{\mu_2}(\sigma_2)\, \cdots\, \psi^{\mu_n}(\sigma_n)\, |\phi\rangle$$

est bosonique pour tout n, ce qui n'a rien de troublant si n est pair, car le produit d'un nombre pair d'opérateurs anticommutatifs est commutatif, mais qui est désagréable si n est impair. On est tenté d'éliminer les états de n impair. Ceci peut être effectué en introduisant un nombre quantique noté $(-1)^F$ tel que F est impair pour les champs ψ^μ fermioniques et pair pour les champs X^μ bosoniques. On fixe alors les choses en posant que l'état vectoriel sans masse a un $(-1)^F$ égal à $+1$. Alors l'état générique précédent vérifie $(-1)^F = (-1)^n$. Et le fait de ne garder que les états de n pair revient à ne garder que les états vérifiant $(-1)^F = 1$. C'est ceci que l'on appelle condition GSO. L'avantage de cette condition est que la théorie obtenue est supersymétrique au sens 10-dimensionnel et pas seulement bi-dimensionnel.

Pour la corde ouverte, les états sans masse consistent en un vecteur et un spineur, qui sont respectivement l'état $b^{\mu}_{-1/2}|0,k\rangle$ et la solution de moindre masse de la condition $F_0|\psi\rangle = 0$, qui est décrite par $|a,k\rangle u^{\alpha}(k)$, où $u^{\alpha}(k)$ est un spineur satisfaisant l'équation sans masse de Dirac et a un indice spinoriel. La supersymétrie impose que ces deux états forment un multiplet de supersymétrie. Or un champ vectoriel en dimension 10 a 10 composantes, mais seules les 8 composantes transverses décrivent des modes indépendants. Par ailleurs, un spineur en dimension 10 a en général $2^5 = 32$ compsosantes complexes, mais puisque $D = 10$ il est possible d'imposer au spineur d'être à la fois de Majorana, ce qui réduit ses composantes à 32 composantes réeles, et de Weyl, ce qui diminue par deux le nombre de ces composantes. Les 16 composantes réelles restantes doivent encore satisfaire l'équation de Dirac $\Gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi$ pour décrire la propagation physique de degrés de liberté, équation qui relie la moitié des composantes à l'autre moitié. Ainsi, un spineur de Majorana-Weyl en $D = 10$ décrit 8 modes de propagation indépendants, soit exactement autant qu'un vecteur. On s'attend donc à ce que les conditions GSO de ramène au premier niveau d'excitation à la condition de Weyl, et nous allons voir que c'est en effet le cas.

L'expression de la condition de Weyl pour les états fermioniques excités nécessite l'opérateur

$$\bar{\Gamma} = \Gamma_{11}\,(-1)^{\sum_{n=1}^{\infty} d_{-n}\cdot d_n},$$

qui anticommute avec d^{μ}_n, puisque Γ_{11} anticommute avec $d^{\mu}_0 \sim \Gamma^{\mu}$ et que l'autre facteur anticommute avec d^{μ}_n où $n \neq O$. Puisque ψ^{μ} est linéaire en les d^{μ}_n il en résulte

$$\{\bar{\Gamma}, \psi^{\mu}(\sigma,\tau)\} = 0.$$

C'est l'opérateur $\bar{\Gamma}$ qui joue le rôle de $(-1)^F$ dans le secteur (R). La condition GSO pour un état fermionique est donc $\bar{\Gamma}|\psi\rangle = |\psi\rangle$.

Pour un état bosonique, la condition, décrite précédemment, s'écrit $G|\psi\rangle = |\psi\rangle$, où

$$G = -(-1)^{\sum_{r=1/2}^{\infty} b_{-r}\cdot b_r}.$$

Ainsi, les opérateurs $\bar{\Gamma}$ et G représentent $(-1)^F$ dans les secteurs respectivement bosonique et fermonique.

L'état bosonique tachyonique est éliminé immédiatement par les conditions GSO, et par conséquent l'état fondamental bosonique est la particule vectorielle $b^{\mu}_{-1/2}|0,k\rangle$ à 8 états de polarisation transverse. Du côté fermionique, l'état fondamental est la solution de moindre masse de la condition $F_0|\psi\rangle = 0$, qui est décrite par $|a,k\rangle u^{\alpha}(k)$, où $u^{\alpha}(k)$ est un spineur satisfaisant l'équation sans masse de Dirac et a un indice spinoriel. La la projection GSO se réduit dans le cas sans masse à la condition de Weyl, comme attendu, puisqu'alors $\bar{\Gamma} = \Gamma_{11}$. Ainsi, on obtient pour l'état fondamental fermionique 8 modes de propagation indépendants, soit exactement autant que pour l'état fondamental bosonique.

Le calcul montre qu'à tous les niveaux d'excitation il y a autant d'états fermioniques que bosoniques. Ceci n'est pas une preuve de la supersymétrie, mais cela en est une indication forte. En réalité, il y a bien supersymétrie, comme on peut le montrer dans un cadre théorique différent.

Bibliographie

Green Michael B., Schwarz John H. et Witten Edward, *Superstring theory - Volume I : Introduction*, Cambridge University Press, 1987.

Kaku Michio, *Introduction to Superstrings*, Springer-Verlag, 1988.

Rougé André, *Annexe C : Applications de la théorie des groupes*, in *Introduction à la physique subatomique*, Ecole Polytechnique, 1999.