Corrigé

1 Combinatoire

1. Par transitivité, il suffit de montrer les propriétés pour deux mots u, v tels que $(u, v) \in R$. C'est alors immédiat.

2.
   - Il est immédiat de montrer que la condition est nécessaire pour deux mots u, v tels que $(u, v) \in R$. A nouveau, par transitivité, la condition est nécessaire dans le cas général.
   - Montrons la condition suffisante par récurrence sur $|u|$. Notons que $|u|_a = |v|_a$ pour tout $a \in A$ car $(a, a) \in D$, de là $|u| = |v|$. Si $|u| = 0$, le résultat est trivial. Sinon, posons $u = cu'$, comme $|v|_c = |u|_c$, $v = wcw'$ avec $|w|_c = 0$. On a $(c, w) \in I$ sinon il existe $d \in \mathrm{alph}(w)$ tel que $(c, d) \in D$, mais alors $\Pi_{\{c,d\}}(u)$ commence par c alors que $\Pi_{\{c,d\}}(v)$ commence par d contrairement à l'hypothèse $\Pi_{\{c,d\}}(u) = \Pi_{\{c,d\}}(v)$. Il est alors facile de vérifier que $\Pi_{\{a,b\}}(u') = \Pi_{\{a,b\}}(ww')$ pour tout couple $(a, b) \in D$. En appliquant l'hypothèse de récurrence, on a $u' \sim_I ww'$ et donc $u = au' \sim_I aww' \sim_I waw' = v$ (en utilisant une fois encore $(a, w) \in I$).

3. Pour chaque mot, on calcule ses projections sur tout ensemble $\{a, b\}$ avec $(a, b) \in D$ ce qui se fait en temps linéaire. On compare ensuite les projections des deux mots ce qui est encore linéaire.

4. Immédiat en utilisant la question 1.2 et la simplifiabilité dans A^*.

5. La condition est clairement nécessaire. Réciproquement, soit a tel que $\Pi_{\{a,b\}}$ commence par a. Ainsi $u = u'au''$ avec $|u'|_a = 0$. Soit $b \in \mathrm{alph}(u')$, $(a, b) \in I$ sinon $\Pi_{\{a,b\}}(u)$ commencerait par b.

6. Soit u un mot. Soit v un mot équivalent à u et a la première lettre de v. D'après les questions 1.2 et 1.5, $a \in \min(u)$. Ainsi, $u = u'au''$ avec $(a, u') \in I$ et $v = av'$. De plus, en utilisant 1.4, on a que v' et $u'u''$ sont équivalents. On en déduit alors facilement l'algorithme

(récursif) recherché. Comme étape préliminaire, on calcule $\Pi_{\{a,b\}}(u)$ pour tout $(a,b) \in D$. On crée ensuite une procédure récursive ayant comme argument d'appel $(\Pi_{\{a,b\}}(u))_{(a,b)\in D}$ et qui :

choisit une lettre minimale c en utilisant la caractérisation de 1.5. On a alors $u = u'cu''$ avec $(c, u') \in I$.

calcule les $\Pi_{\{a,b\}}(u'u'')$ pour tout $(a,b) \in D$ (il suffit pour cela de supprimer la première occurrence de c dans toutes les projections $\Pi_{\{a,b\}}(u)$ où elle apparaît)

s'appelle avec comme nouvel argument $(\Pi_{\{a,b\}}(u'u''))_{(a,b)\in D}$

Cette procédure s'arrête dès que son argument est constitué d'un uplet de mots vides.
Le pire des cas est celui où les lettres de A sont deux à deux indépendantes, la complexité est alors de l'ordre de $|A|^n$ où n est la longueur du mot.

2 Formes normales

1. Montrons que $u = av$ est sous *fnl* ssi a est la plus petite des lettres de $\min(u)$ et v est sous *fnl*. La condition est clairement nécessaire. Réciproquement soit $u' = bu'' \sim_I u$ avec $b \in A$. D'après 1.1, $u = vbv'$ avec $|v|_b = 0$, de plus d'après 1.2, $(v, b) \in I$ ainsi $b \in \min(u)$ et de là $a \leq b$. Si $a < b$, on a $u < u'$. Si $a = b$, $v \sim_I u''$ d'après 1.4 et donc $v \leq u''$ puisque v est sous *fnl*; ainsi $u = av \leq u' = au''$.

   Soit u un mot. On calcule d'abord, en temps linéaire, $\Pi_{\{a,b\}}(u)$ pour tout $(a,b) \in D$. On détermine ensuite la plus petite lettre de $\min(u)$ en utilisant 1.5 et on recommence en ne tenant plus compte de cette lettre.

2. Soit $A = \{a, b\}$ avec $a < b$ et $(a,b) \in I$. Le mot aab est sous *fnl* mais pas sous *fnf*. Le mot équivalent aba est sous *fnf* mais pas sous *fnl*.

3. Soit u un mot non vide. On montre l'existence d'un mot équivalent sous *fnf* par récurrence sur $|u|$. Si $|u| = 1$, le résultat est trivial. Supposons maintenant $u = u'a$, par hypothèse de récurrence il existe un mot $v' = v_1 \dots v_k$ sous *fnf* et équivalent à u'. Si $(v_k, a) \notin I$, il est immédiat

de vérifier que $v'a$ est sous *fnf*. Sinon, soit $1 \leq i \leq k$ le plus petit entier tel que $(v_i \dots v_k, a) \in I$. Soit v'_i le mot sous *fnl* équivalent à $v_i a$. Alors il est immédiat de vérifier que le mot $v_1 \dots v_{i-1} v'_i v_{i+1} \dots v_k$ est équivalent à u et sous *fnf*.

L'unicité se démontre par contradiction. Soit $u = u_1 \dots u_n$ sous *fnf* un mot de longueur minimale parmi ceux ayant au moins un mot équivalent $v = v_1 \dots v_k$ distinct sous *fnf*. On a $u_1 \neq v_1$ (sinon, en utilisant 1.4, on contredirait la minimalité de u). Comme u_1 et v_1 sont tous les deux sous fnl (condition F2), on en déduit que $\mathrm{alph}(u_1) \neq \mathrm{alph}(v_1)$. Par symétrie, on peut donc supposer qu'il existe une lettre $b \in \mathrm{alph}(v_1) \setminus \mathrm{alph}(u_1)$. D'après 1.1, $b \in \mathrm{alph}(u)$, d'où $u_2 \dots u_n = zbz'$ avec $|z|_b = 0$. Mais alors d'après 1.2, $(u_1 z, b) \in I$ ce qui contredit la condition F3!

4. Montrons que u est sous *fnf* ssi $u = vw$ avec v est le plus petit mot contenant exactement une occurrence de chaque lettre de $\min(u)$ et w est sous *fnf*.

   Si $u = u_1 \dots u_n$ est sous *fnf*, toutes les lettres de u_1 sont dans $\min(u)$ d'après la condition F1 et ce sont les seules d'après la condition F3. Ainsi la condition proposée est nécessaire (en posant $v = u_1$ et $w = u_2 \dots u_n$).

   Réciproquement soit $(w_2, \dots, w_n)$ une décomposition de Foata de w. Alors $(v, w_2, \dots, w_n)$ est une décomposition de Foata de u. En effet les conditions F0 et F2 sont satisfaites par construction. Soient $a, b \in \min(u)$ tels que a précède b dans u, alors $u = u'au''br$ avec $(u'au'', b) \in I$. Ainsi $(a, b) \in I$ et la condition F1 est vérifiée. Enfin, soit a une lettre de w_2, comme a n'est pas minimale dans u, la condition F3 est vérifiée.

   On en déduit l'algorithme de calcul de la *fnf* suivant. Soit u un mot. On calcule d'abord, en temps linéaire, $\Pi_{\{a,b\}}(u)$ pour tout $(a, b) \in D$. On détermine ensuite $\min(u)$ en utilisant 1.5 et on recommence en ne tenant plus compte de ces lettres.

3 Reconnaissables

1. Il s'agit presque d'une "question de cours"!
(i) $\Longrightarrow$ (ii): si η reconnaît $T \subseteq \mathbb{M}(A,I)$, $\eta \circ \varphi$ reconnaît $\varphi^{-1}(T)$.
(ii) $\Longrightarrow$ (iii): soit $\eta : A^* \longrightarrow S$ reconnaissant $\varphi^{-1}(T)$: il existe $F \subseteq S$ tel que $\varphi^{-1}(T) = \eta^{-1}(F)$. Pour $u \in \mathbb{M}(A,I)$, posons $S_u = \{s \in S \mid \exists x \in A^*$ tel que $\varphi(x) = u, \eta(x)s \in F\}$. Il est alors facile de vérifier que $u^{-1}T = \bigcup_{s \in S_u} \varphi(\eta^{-1}(s))$. L'ensemble S étant fini, il existe un nombre fini de S_u et donc de $u^{-1}T$.
(iii) $\Longrightarrow$ (i): Soit $K = \{u^{-1}T \mid u \in \mathbb{M}(A,I)\}$. L'ensemble fini S des applications de K dans K muni de la loi de composition interne définie par $s \cdot s' = s' \circ s$ a une structure de monoïde. Soit $\eta : \mathbb{M}(A,I) \longrightarrow S$ défini par $\eta(v)(u^{-1}T) = v^{-1}(u^{-1}T) = (uv)^{-1}T$. Il est immédiat de vérifier que η est un morphisme et que $T = \eta^{-1}(\{f \in S \mid \varepsilon \in f(\varepsilon^{-1}T)\})$ est reconnu par η.

2. Soit $T \subseteq \mathbb{M}(A,I)$ un langage de traces reconnu par un morphisme η de $\mathbb{M}(A,I)$ dans un monoïde fini S. L'ensemble $S \times \mathcal{P}(A)$ peut être muni d'une structure de monoïde (produit) d'élément neutre $(1_S, \emptyset)$ en posant $(s,B)(s',B') = (ss', B \cup B')$. Le langage T est clairement reconnu par le morphisme alphabétique η' de $\mathbb{M}(A,I)$ dans $S \times \mathcal{P}(A)$ défini par $\eta'(t) = (\eta(t), \mathrm{alph}(t))$.

3. D'après la question précédente, on peut supposer que $T = \eta^{-1}(F)$ où η est un morphisme alphabétique de $\mathbb{M}(A,I)$ dans un monoïde fini S et $F \subseteq S$. Pour tout élément s de $\eta(\mathbb{M}(A,I))$, on peut définir sans ambiguité $\mathrm{alph}(s)$. Posons alors $F' = \{s \in \eta(\mathbb{M}(A,I)) \mid \exists s' \in \eta(\mathbb{M}(A,I)), ss' \in F, \mathrm{alph}(s)$ connexe et $(\mathrm{alph}(s), \mathrm{alph}(s')) \in I\}$. Il est alors facile de vérifier que $c(T) = \eta^{-1}(F')$.

4. Soit $w \in A^*$. Montrons que $w \in$ FNL ssi (†) :pour toute factorisation $w = xbyaz$ avec $(a,b) \in I$ et $a < b$, on a $(y,a) \notin I$.

   Si $w \in$ FNL, la condition (†) est nécessaire sinon $xabyz \sim xbyaz$ et $xabyz < xbyaz$. Réciproquement, soit w vérifiant la condition. Si $w \notin$ FNL, il existe $w' < w, w' \sim w$. Posons $w = ubv$, $w' = uav'$ avec $a < b$. Comme $w \sim w'$, on déduit de 1.2 que $(a,b) \in I$. De $|w|_a = |w'|_a$, il vient $w = ubv'av''$ avec $|v'|_a = 0$. En appliquant encore

1.2, on obtient $(v', a) \in I$ et contrairement à l'hypothèse la condition $(\dagger)$ n'est pas vérifiée.

Cette caractérisation de FNL montre que $\text{FNL} = A^* \setminus \bigcup_{(a,b)\in I, a<b} A^*bI(a)^*aA^*$ où $I(a) = \{b \in A \mid (a,b) \in I\}$. En utilisant le fait que tout langage rationnel de mots est reconnaissable (théorème de Kleene) et que les langages reconnaissables sont clos par complémentaire, on en déduit que FNL est reconnaissable.

5. Supposons w non connexe. Alors $w = u_1v_1 \dots u_nv_nu_{n+1}$ avec $(u = u_1 \dots u_nu_{n+1}, v = v_1 \dots v_n) \in I$ et $u_i \neq 1, v_i \neq 1$ pour tout $1 \leq i \leq n$. Soit a_i (resp. b_i) la première lettre de $u_i = a_iu'_i$ (resp. $v_i = b_iv'_i$) pour $1 \leq i \leq n$. Comme $(u, v) \in I$ et $w \in \text{FNL}$, on a $a_1 < b_1 < a_2 \dots$.

   Ou bien $u_{n+1} = 1$ auquel cas w^2 n'est pas dans FNL puisque $w^2 = u_1 \dots u_nb_nv'_na_1u'_1 \dots$ et $b_nv'_na_1 \sim a_1b_nv'_n$ et $b_nv'_na_1 > a_1b_nv'_n$.

   Ou bien $u_{n+1} = a_{n+1}u'_{n+1}$ avec $a_{n+1} \in A$. Comme précédemment, on a alors $b_n < a_{n+1}$. Ainsi w^2 n'est pas dans FNL puisque $w^2 = u_1 \dots a_{n+1}u'_{n+1}u_1b_1v'_1 \dots$ et $a_{n+1}u'_{n+1}u_1b_1 \sim b_1a_{n+1}u'_{n+1}u_1$ et $a_{n+1}u'_{n+1}u_1b_1 > b_1a_{n+1}u'_{n+1}u_1$.

6. Soit $T \in \text{Rec}(\mathbb{M}(A, I))$. D'après 3.1, $\varphi^{-1}(T) \in \text{Rec}(A^*)$. Les langages reconnaissables sont clos par intersection et donc, en utilisant 3.4, $L = \varphi^{-1}(T) \cap \text{FNL} \in \text{Rec}(A^*)$. De plus on a clairement $\varphi(L) = T$. D'après le théorème de Kleene, $L \in \text{Rat}(A^*)$. Par définition, L s'écrit donc à partir des langages finis en utilisant les opérations d'union, concaténation et itération. Par ailleurs, si K et K' sont deux langages de A^*, on a $\varphi(KL) = \varphi(K)\varphi(L)$, $\varphi(K \cup L) = \varphi(K) \cup \varphi(L)$ et $\varphi(K^*) = \varphi(K)^*$. Ainsi $T = \varphi(L)$ s'écrit aussi à partir de langages finis de traces en utilisant des opérations d'union, concaténation et itération. Il suffit donc de montrer que ces opérations d'itération sont en fait des opérations de c-itération. Supposons donc que $L = L_1L_2^*L_3$. Tout mot de L_2 est alors connexe d'après 3.5 et donc $T = \varphi(L) = \varphi(L_1)\varphi(L_2)^*\varphi(L_3) = \varphi(L_1)\varphi(L_2)^{c-*}\varphi(L_3)$. Dans ce cas particulier, toute opération d'itération peut donc être remplacée par une opération de c-itération et le langage T est bien dans $\text{c}-\text{Rat}(\mathbb{M}(A, I))$.

4 Rang

1. L'implication (ii) entraîne (i) est immédiate. Réciproquement montrons d'abord le résultat pour $n = 1$ par récurrence sur $|x|$.

   Si $|x| = 0$, la propriété est vraie en posant $x_0 = x_1 = \varepsilon, y_0 = u_0, y_1 = u_1$. Sinon posons $x = ax'$ avec $a \in A$.

   - Si $|u_0|_a = 0$, d'après 1.2, $(a, u_0) \in I$ et $u_1 \sim au'_1$. Ainsi $ax'y \sim u_0au'_1 \sim au_0u'_1$ et par 1.4, $x'y \sim u_0u'_1$. On peut alors appliquer l'hypothèse de récurrence : il existe x'_0, x'_1, y'_0, y'_1 telles que $x' \sim x'_0x'_1, y \sim y'_0y'_1, u_0 \sim x'_0y'_0, u'_1 \sim x'_1y'_1$ et $(y'_0, x'_1) \in I$. Posons $x_0 = x'_0$, $x_1 = ax'_1$, $y_0 = y'_0$ et $y_1 = y'_1$, comme $(a, u_0) \in I$, on a en particulier $(a, x'_0) \in I$ et $(a, y'_0) \in I$. Ainsi $x = ax' \sim ax'_0x'_1 \sim x'_0ax'_1 \sim x_0x_1$ et le résultat est obtenu dans ce cas.
   - Si $|u_0|_a > 0$, $u_0 \sim au'_0$. On applique l'hypothèse de récurrence à $x'y \sim u'_0u_1$: il existe x'_0, x'_1, y'_0, y'_1 telles que $x' \sim x'_0x'_1, y \sim y'_0y'_1, u'_0 \sim x'_0y'_0, u_1 \sim x'_1y'_1$ et $(y'_0, x'_1) \in I$. La formule cherchée est obtenue en posant $u_0 = au'_0$.

   Le résultat pour une valeur quelconque de n s'obtient par une récurrence facile.

2. Soient $x, y \in A^*$, $x \sim a^pb^q, y \sim a^rb^s$. Ainsi $\mathrm{rang}(x, y, a^*b^*) = 1$. Par contre, il est facile de vérifier que $\mathrm{rang}(a^n, b^n, (ab)^*) = n - 1$ et donc $\mathrm{rang}(L) = \omega$.

3. Soient $x, y \in A^*$ tels qu'il existe $x_1 \in L_1, x_2 \in L_2$ avec $xy \sim x_1x_2$. D'après la question 4.1, il existe p, q, r, s avec $x \sim pq$, $y \sim rs$, $x_1 \sim pr$, $x_2 \sim qs$ et $(q, r) \in I$. Comme L_1 est clos, on a $pr \in L_1$ et de même $qs \in L_2$. Ainsi $pqrs \in L_1L_2$ et $\mathrm{rang}(x, y, L_1L_2) \leq 1$.

4. Soit $x, y \in A^*$ tels que xy soit équivalent à un mot de L^*. D'après 4.1 et en utilisant le fait que L est clos, il existe $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n \in A^*$ tels que $x \sim x_1 \ldots x_n, y \sim y_1 \ldots y_n$, $x_iy_i \in L$ pour $1 \leq i \leq n$ et $(y_i, x_{i+1} \ldots x_n) \in I$ pour $1 \leq i < n$. Soit i tel que $x_i \neq 1$, $y_i \neq 1$. Comme x_iy_i est connexe, il existe $a_i \in \mathrm{alph}(x_i), b_i \in \mathrm{alph}(y_i)$ tel que $(a_i, b_i) \in D$. Comme $(b_i, x_{i+1} \ldots x_n) \in I$, les lettres b_i sont deux à deux distinctes. Ainsi il existe au plus $k \leq |A|$ indices i tels que $x_i \neq 1$ et $y_i \neq$

1. En regroupant les facteurs pour lesquels $x_i = 1$ ou $y_i = 1$ par blocs (chacun de ces blocs est dans L^*), on obtient $x \sim w_0x_1w_1 \dots x_kw_k, y \sim z_0y_1z_1 \dots y_kz_k$, $x_iy_i \in L$ pour $1 \leq i \leq k$, $w_i, z_i \in L^*$ pour $0 \leq i \leq k$, $(y_i, w_{i+1} \dots x_kw_k) \in I$ pour $1 \leq i < k$ et $(z_i, x_{i+1}w_{i+1} \dots x_kw_k) \in I$ pour $1 \leq i < k$. Comme $w_0z_0(x_1y_1) \dots w_1z_1 \dots (x_ky_k)w_kz_k \in L^*$, on obtient le résultat cherché.

5. Soit $k = \mathrm{rang}(L)$ et $T = \varphi(L)$. Soit η un morphisme (que l'on supposera alphabétique grâce à la question 3.2 appliquée à $\mathbb{M}(A^*, \emptyset)$) de A^* dans un monoïde fini S reconnaissant L. Pour tout $u \in \mathbb{M}(A, I)$, posons $R(u) = \{(s_0, \dots, s_k) \mid \exists x_0, \dots x_k \in A^*$ tels que $u = \varphi(x_0 \dots x_k)$ et $s_i = \eta(x_i)$ pour tout $0 \leq i \leq k\}$.

   Montrons que si u et u' sont deux traces telles que $R(u) = R(u')$ alors $u^{-1}T = u'^{-1}T$. Le nombre de $R(u)$ distincts étant majoré par $2^{|S|^{k+1}}$, on en déduira que T est reconnaissable grâce à 3.1.

   Soit $v \in u^{-1}T$ et $x, y \in A^*$ avec $u = \varphi(x), v = \varphi(y)$. Le mot xy est équivalent à un mot de L, ainsi comme $\mathrm{rang}(L) = k$, il existe $x_0, y_0, \dots, x_k, y_k \in A^*$ tels que $x \sim x_0 \dots x_k, y \sim y_0 \dots y_k$, $x_0y_0 \dots x_ky_k \in L$ et $(y_i, x_{i+1} \dots x_n) \in I$ pour $0 \leq i < n$. On a donc $(\eta(x_0), \dots, \eta(x_n)) \in R(u)$, comme $R(u) = R(u')$ il existe des mots $x'_0, \dots, x'_k \in A^*$ tels que $u' = \varphi(x'_0 \dots x'_k)$ et $\eta(x'_i) = \eta(x_i)$ pour tout $0 \leq i \leq k$. Le morphisme η étant alphabétique, on a en particulier $\mathrm{alph}(x'_i) = \mathrm{alph}(x_i)$ pour tout $0 \leq i \leq k$. Par ailleurs le morphisme η reconnaît L et comme $\eta(x_0y_0 \dots x_ky_k) = \eta(x'_0y_0 \dots x'_ky_k)$, on en déduit $x'_0y_0 \dots x'_ky_k \in L$. Finalement $(x'_0 \dots x'_k)(y_0 \dots y_k)$ est équivalent à un mot de L et donc $u'v \in T$. Ainsi $u^{-1}T \subseteq u'^{-1}T$ et par symétrie $u^{-1}T = u'^{-1}T$.

6. Considérons $A = \{a, b\}$ avec $(a, b) \in I$ et $L = (ab)^*(a^* \cup b^*)$. Alors $\varphi(L) = \mathbb{M}(A, I)$ est reconnaissable alors que le rang de L n'est pas fini (par exemple $\mathrm{rang}(a^n, b^n, L) = n - 1$ pour tout n).

7. $\mathrm{Rec}(\mathbb{M}(A, I))$ contient clairement l'ensemble vide et les langages $\{\varphi(a)\}$ pour $a \in A$. Si $u \in \mathbb{M}(A, I)$ et $T_1, T_2 \subseteq \mathbb{M}(A, I)$, on a $u^{-1}(T_1 \cup T_2) = u^{-1}T_1 \cup u^{-1}T_2$, de là $\mathrm{Rec}(\mathbb{M}(A, I))$ est clos par union (en utilisant 4.1). $\mathrm{Rec}(\mathbb{M}(A, I))$ est clos par concaténation d'après 4.3 et 4.5 et $\mathrm{Rec}(\mathbb{M}(A, I))$ est clos par itération concurrente d'après 3.3, 4.4 et

4.5. Ainsi par définition de $\mathrm{c-Rat}(\mathbb{M}(A,I))$, $\mathrm{c-Rat}(\mathbb{M}(A,I)) \subseteq \mathrm{Rec}(\mathbb{M}(A,I))$.

5 Graphes de dépendances

1. Pour $a \in A$, soit f_a le graphe de dépendance constitué d'un seul sommet $(a,0)$ et sans arête. Soit ψ le morphisme de A^* dans $\mathbb{F}$(A,I) qui envoie toute lettre $a \in A$ sur f_a. Par définition de la concaténation dans $\mathbb{F}$(A,I), il est clair que $f_a \cdot f_b = f_b \cdot f_a$ dès que $(a,b) \in I$. Ainsi ψ se factorise en un morphisme $\overline{\psi}$ de $\mathbb{M}$(A,I) dans $\mathbb{F}$(A,I). Soit $u \in A^*$ et $t = \varphi(u) \in \mathbb{M}(A,I)$, il est immédiat de vérifier que $\overline{\psi}(t) = ((|t|_a)_{a\in A}, E)$ avec $((a,i),(b,j)) \in E$ si et seulement si $(a,b) \in D$ et dans le mot $\Pi_{\{a,b\}}(u)$ (qui ne dépend que de t d'après la question 1.2) la $i^{ème}$ occurrence de a est avant la $j^{ème}$ occurrence de b.

   Montrons que $\overline{\psi}$ est une bijection. Soit $f = (V_f, E_f) \in \mathbb{F}(A,I)$ et soit $(a_1,i_1)\dots(a_n,i_n)$ une énumération de V_f compatible avec E_f (i.e. telle que $((a_j,i_j),(a_k,i_k)) \in E_f$ entraîne $j<k$). Il est facile de vérifier que $\psi(a_1\dots a_n) = f$. Ainsi $\overline{\psi}$ est surjective. Soient $u,v \in \mathbb{M}(A,I)$ avec $\overline{\psi}(u) = \overline{\psi}(v) = ((n_a)_{a\in A}, E_f)$. Soit $(a,b) \in D$, posons $V_{a,b} = V_a(n_a) \cup V_b(n_b)$. Par définition d'un graphe de dépendance, les éléments de $V_{a,b}$ sont totalement ordonnés et définissent donc un mot $x \in \{a,b\}^*$. D'après la caractérisation de ψ donnée ci-dessus, on a $x = \Pi_{\{a,b\}}(u)$. Ainsi $\Pi_{\{a,b\}}(u) = \Pi_{\{a,b\}}(v)$ et par la question 1.2, $u = v$ et $\overline{\psi}$ est injective.

2. Tout ensemble admettant une borne supérieure est évidemment cohérent. Réciproquement soit $K \subseteq \mathbb{G}(A,I)$ cohérent. Définissons $V = \bigcup_{g\in K} V_g$ et $E = \bigcup_{g\in K} E_g$ et montrons que (V,E) est un graphe de dépendance et que c'est la borne supérieure de K.

   C1: Supposons que $(a,i),(b,j) \in V$ avec $((a,i),(b,j)) \in E^+$ et $((b,j),(a,i)) \in E^+$. Il existe $f,g \in K$ tels que $(a,i) \in V_f$ et $(b,j) \in V_g$. Comme K est cohérent, il existe $h \in \mathbb{G}(A,I)$ tel que $f \leq h$ et $g \leq h$. Ainsi $(a,i),(b,j) \in V_h$ et il est facile de vérifier que $((a,i),(b,j)) \in E_h^+$ et $((b,j),(a,i)) \in E_h^+$ contrairement à l'hypothèse que h vérifie C2.

   C2: Si $((a,i),(b,j)) \in E$, il existe $g \in K$ tel que $((a,i),(b,j)) \in E_g$ et donc $(a,b) \in D$. Réciproquement soient $(a,i) \neq (b,j) \in V$ avec

$(a,b) \in D$. Il existe $f, g \in K$ tels que $(a,i) \in V_f$ et $(b,j) \in V_g$. Comme K est cohérent, il existe $h \in \mathbb{G}(A,I)$ tel que $f \leq h$ et $g \leq h$. Ainsi $(a,i),(b,j) \in V_h$. Comme h est un graphe de dépendance, on a donc ou bien $((a,i),(b,j)) \in E_h$ ou bien $((b,j),(a,i)) \in E_h$. Par définition de la concaténation dans $\mathbb{G}$(A,I) on en déduit ou bien $(a,i) \in V_g$ et $((a,i),(b,j)) \in E_g$ ou bien $(b,j) \in V_f$ et $((b,j),(a,i)) \in E_f$. Ainsi ou bien $((a,i),(b,j)) \in E$ ou bien $((b,j),(a,i)) \in E$.

C3: Soient $(a,i),(a,j) \in V$ avec $i < j$. Il existe $g \in K$ tel que $(a,j) \in V_g$. Mais alors $(a,i) \in V_g$ et $((a,i),(a,j)) \in E_g \subseteq E$. La réciproque est immédiate.

Il reste à montrer que $(V,E) = \sqcup K$. Soit $g \in K$, par construction de (V,E), on vérifie aisément que g est un préfixe de (V,E). Réciproquement soit $h \in \mathbb{G}(A,I)$ un majorant de K. On a clairement $V \subseteq V_h$ et $E \subseteq E_h$. Soit $((a,i),(b,j)) \in E_h$ avec $(b,j) \in V$. Il existe $g \in K$ tel que $(b,j) \in V_g$. Comme $g \leq h$, on en déduit $(a,i) \in V_g \subseteq V$ et $((a,i),(b,j)) \in E_g \subseteq E$. De là (V,E) est un préfixe de h.

3. Soit $g \in \mathbb{G}(A,I)$. On dit que g est dominé par un ensemble $V \subseteq V_g$ de sommets si $V_g = \{(a,i) \in V_g \mid \exists (b,j) \in V \text{ tel que } ((a,i),(b,j)) \in E_g^+\}$.

   Montrons que $g \in G$ est premier si et seulement si il est dominé par un ensemble de sommets réduit à un singleton.

   Soit $g \in \mathbb{G}(A,I)$ premier. Pour tout sommet (b,j) de V_g, soit $g_{(b,j)}$ le graphe de dépendance égal à la restriction de g aux sommets (a,i) tels que $((a,i),(b,j)) \in E_g$. Soit $K = \{g_{(b,j)} \mid (b,j) \in V_g\}$. L'ensemble K est clairement majoré par g et est donc cohérent. Il admet donc une borne supérieure égale, d'après la démonstration de la question 5.2, à g. Comme g est premier, on en déduit qu'il existe $(b,j) \in V_g$ tel que $g = g_{(b,j)}$ d'où le résultat.

   Réciproquement soit $g \in \mathbb{G}(A,I)$ dominé par un sommet $(a,i) \in V_g$. Soit $K \subseteq \mathbb{G}(A,I)$ tel que $h = \sqcup K$ existe et $g \leq h$. Alors g est la restriction de h à V_g. En particulier $(a,i) \in V_h$ et d'après la démonstration de la question 5.2 il existe $f \in K$ tel que $(a,i) \in V_f$. Mais alors $g \leq f$ et g est premier.

   Enfin soit $g \in \mathbb{G}(A,I)$. D'après ce qui précède, les éléments premiers inférieurs ou égaux à g sont exactement les $g_{(b,j)}$ et $\sqcup\{g_{(b,j)} \mid (b,j) \in V_g\} = g$.

4. Montrons qu'un graphe de dépendance est compact si et seulement si il est dominé par un ensemble fini de sommets c'est à dire s'il est dans $\mathbb{F}(A,I)$. La preuve est similaire à celle de la question précédente dont on garde les notations.

   Soit $g \in \mathbb{G}(A,I)$ compact. Pour tout ensemble de sommets $V \subseteq V_g$, soit g_V le graphe de dépendance égal à la réunion des $g_{(b,j)}$ pour $(b,j) \in V$. Soit $K = \{g_V \mid V \subseteq V_g, V \text{ fini}\}$. Si $V, V' \subseteq V_g$, on a $\sqcup\{g_V, g_{V'}\} = g_{V\cup V'}$ et K est donc dirigé et en particulier cohérent. Il admet donc une borne supérieure égale, d'après la démonstration de la question 5.2, à g. Comme g est compact, on en déduit qu'il existe V fini dans V_g tel que $g = g_V$ d'où le résultat.

   Réciproquement soit $g \in \mathbb{G}(A,I)$ dominé par un ensemble fini V de sommets. Soit $K \subseteq \mathbb{G}(A,I)$ dirigé tel que $h = \sqcup K$ existe et $g \leq h$. De manière analogue à la question précédente, on en déduit $V \subseteq V_h$ et d'après la démonstration de la question 5.2 il existe $f \in K$ tel que $V \subseteq V_f$. Mais alors $g \leq f$ et g est premier.

   Tout élément premier étant compact, on déduit de la question précédente que tout graphe de dépendance est la borne supérieure des éléments compacts qui lui inférieurs ou égaux.

5. Soit $g \in \mathbb{G}(A,I)$, d'après la question précédente l'ensemble $C(g)$ des éléments compacts inférieurs ou égaux à g est dénombrable. On peut donc énumérer les éléments de $C(g)$ en une suite $(g_n)_{n<\omega}$. On définit alors inductivement la suite croissante $(f_n)_{n<\omega}$ dans $C(g)$ de la manière suivante : $f_0 = g_0$ et si f_n est défini, on choisit f_{n+1} comme étant un majorant de f_n et g_n dans $C(g)$ (un tel majorant existe car l'ensemble $C(g)$ est cohérent d'après la caractérisation de 5.4). On a alors clairement $g = \sqcup\{f_n \mid n < \omega\} = \sqcup\{g_n \mid n < \omega\}$.

6 Equations

1. Le sens "seulement si" résulte de la question 4.1.

Soit K un ensemble fini de générateurs de M. Posons $A = (K \setminus \{1_M\}) \setminus (K \setminus \{1_M\})^2$ l'ensemble des éléments de K ne s'écrivant pas comme produit de deux éléments ($\neq 1_M$) de M. Il est facile de montrer par récurrence sur la longueur que tout élément de K, et donc de M, peut s'écrire comme produit d'un nombre fini d'éléments de A : A engendre M. Soit I_A la relation d'indépendance sur A définie par $(x, y) \in I_A$ si $xy = yx$ dans M.

Soit ψ la surjection canonique de A^* dans M associant à un mot de A^* le produit dans M de ses éléments. Par définition de I_A, il est immédiat de vérifier que deux mots $\sim_{I_A}$-équivalents de A^* ont la même longueur et la même image par ψ. Ainsi ψ induit un homomorphisme surjectif $\overline{\psi}$ de $\mathbb{M}(A, I_A)$ dans M.

Montrons que $\overline{\psi}$ est injectif par récurrence sur la longueur. Soient $u, v \in \mathbb{M}(A, I_A)$ tels que $\overline{\psi}(u) = \overline{\psi}(v)$ et tels que pour tout facteur propre (i.e. $\neq 1_M, u$) w de u, $\overline{\psi}^{-1}(\overline{\psi}(w))$ se réduit à w. Si $u \in A \cup \{1_M\}$, alors $v = u$ puisque par définition, un élément de A ne peut s'écrire comme produit de deux éléments. Si $u \notin A \cup \{1_M\}$, $u = xy$, $v = zt$ avec $x, z \in A$, $y \neq 1_M$, $t \neq 1_M$. On a dans M, $\overline{\psi}(x)\overline{\psi}(y) = \overline{\psi}(z)\overline{\psi}(t)$, ainsi par hypothèse sur M et en utilisant la surjectivité de $\overline{\psi}$, il existe des traces $p, q, r, s \in \mathbb{M}(A, I_A)$ telles que $\overline{\psi}(x) = \overline{\psi}(p)\overline{\psi}(q)$, $\overline{\psi}(y) = \overline{\psi}(r)\overline{\psi}(s)$, $\overline{\psi}(z) = \overline{\psi}(p)\overline{\psi}(r)$, $\overline{\psi}(t) = \overline{\psi}(q)\overline{\psi}(s)$ et $\overline{\psi}(q)\overline{\psi}(r) = \overline{\psi}(r)\overline{\psi}(q)$. Comme x, y, z, t sont des facteurs propres de u, on peut appliquer l'hypothèse de récurrence et on en déduit $x = pq, y = rs, z = pr$ et $t = qs$.

- Si $p \neq 1_M$ ou $s \neq 1_M$, $\overline{\psi}(qr)$ est un facteur propre de u. Par hypothèse de récurrence $\overline{\psi}(q)\overline{\psi}(r) = \overline{\psi}(r)\overline{\psi}(q)$ implique alors $qr = rq$ dans $\mathbb{M}(A, I_A)$. Ainsi $u = pqrs = prqs = v$.
- Si $p = s = 1_M$, $q = x \in A$ et $r = y \in A$. Alors $qr = rq$ dans M et les traces $u = qr$ et $v = rq$ sont égales dans $\mathbb{M}(A, I_A)$.

2. (a) Deux éléments transposés $u = xy$ et $v = yx$ d'un monoïde quelconque sont toujours conjugués puisque $ux = xv$. Soient u, v, w dans un monoïde libre tels que $uw = wv$. Montrons par récurrence sur $|w|$ que u et v sont transposés. Le cas $|w| = 0$, est trivial. Si $|w| = |u|$, u et v sont égaux à w (et donc transposés). Si $|w| < |u|$, $u = wu'$ et $v = u'w$ d'où le résultat. Si $|w| > |u|$, $w = uw' = w'v$ et on applique l'hypothèse de récurrence à u, v, w'.

(b) Soit $A = \{a, b, c\}$ avec $(a, b) \in D, (b, c) \in D$ et $(a, c) \in I$. Les traces abc et cba ne sont clairement pas transposées. Elles sont pourtant conjuguées puisque $(abc)(aba) = (aba)(cba)$.

(c) Soit $\mathbb{M}$(A,I) un monoïde de traces et soit $Tr*$ la clôture transitive de la relation de transposition dans $\mathbb{M}$(A,I). Soient $u, v, w \in \mathbb{M}(A, I)$ tels que $uw = wv$. Montrons par récurrence sur $|w|$ que $(u, v) \in Tr*$. Si $|w| = 0$, $u = v$ et le résultat est immédiat. Sinon, d'après la question 4.1, il existe p, q, r, s telles que $u = pq, w = rs, w = pr, v = qs$ et $(q, r) \in I$. Si $|r| = |w|$, on a $u = v = q$ et $(u, v) \in Tr*$. Si $|r| < |w|$, on peut appliquer l'hypothèse de récurrence à (qp, qs, r) (en effet, comme $(q, r) \in I$ et $w = rs = pr$, on a $qpr = qrs = rqs$). Ainsi $(qp, qs) \in Tr*$. Comme $(pq, qp) \in Tr*$, on en déduit par transitivité que $(u, v) \in Tr*$.

3. Par contradiction. Parmi toutes les solutions (u, v) non-cycliques et vérifiant i) ou ii) d'équations $e = f$ choisissons en une telle que $|uv|$ soit minimale. Par symétrie et simplifiabilité, on peut supposer que $e = xe'$, $f = yf'$ et que $|u| \leq |v|$. En appliquant la question 4.1 à $u\theta(e') = v\theta(f')$, on obtient $u = pq$, $v = ps$ pour des traces p, q, s avec $(q, s) \in I$. Si $I = \emptyset$, on a $q = 1$ car $|u| \leq |v|$ et donc $v = us$. Sinon ii) est vérifié, et $|u| \leq |v|$ entraine $|u|_a \leq |v|_a$ pour toute lettre a. Ainsi $|q|_a \leq |s|_a$ pour $a \in \mathrm{alph}(q)$ et $(q, s) \in I$ n'est possible que si $q = 1$.

Nous avons dans tous les cas $v = us$. Si $s = 1$ ou $u = 1$, (u, v) est cyclique contrairement à l'hypothèse. Sinon, remplaçons l'inconnue y par xz. On obtient ainsi une nouvelle équation $g = h$ en les inconnues x, z. Par construction, (u, s) est une solution de $g = h$ et $|us| < |uv|$. Si $I = \emptyset$, (u, s) est une solution cyclique par minimalité de $|uv|$. Sinon, soient α, β tels que $\alpha|u|_a = \beta|v|_a$ pour tout $a \in A$. Comme $|u| \leq |v|$ et $s \neq 1$, on a $\alpha > \beta$ et donc $(\alpha - \beta)|u|_a = \beta|s|_a$ pour tout $a \in A$. Par minimalité de $|uv|$, on en déduit que (u, s) est une solution cyclique. Ainsi dans tous les cas $(u, v = us)$ est une solution cyclique contrairement à l'hypothèse.

4. Supposons $(u', v') \notin I$. Soient $a \in \mathrm{alph}(u'), b \in \mathrm{alph}(v')$ avec $(a, b) \in D$. D'après 1.2, $(\Pi_{\{a,b\}}(u), \Pi_{\{a,b\}}(v)) = (\Pi_{\{a,b\}}(u'), \Pi_{\{a,b\}}(v'))$ est une solution de $e = f$ dans $(\mathbb{M}\{a, b\}, \emptyset)$. D'après 6.3 i), on en déduit que

$(\Pi_{\{a,b\}}(u'), \Pi_{\{a,b\}}(v'))$ est une solution cyclique et donc que $\{a,b\} \subseteq \mathrm{alph}(u') \cap \mathrm{alph}(v')$. Ainsi, $\mathrm{alph}(u') = \mathrm{alph}(v')$.

5. D'après la question précédente, il suffit de considérer le cas où u, v sont de même alphabet connexe. Soient $a, b \in \mathrm{alph}(u), (a,b) \in D$, d'après 6.3 i), $(\Pi_{\{a,b\}}(u), \Pi_{\{a,b\}}(v))$ est une solution cyclique de $e = f$ dans $(\mathbb{M}\{a,b\}, \emptyset)$. Ainsi il existe $\alpha, \beta > 0$ tels que $\alpha|u|_a = \beta|v|_a$ et $\alpha|u|_b = \beta|v|_b$. L'alphabet $\mathrm{alph}(u)$ est connexe donc pour toutes lettres $c, d \in \mathrm{alph}(u)$, il existe une suite de lettres dans $\mathrm{alph}(u)$, $a_0 = c, a_1, \ldots, a_k = d$ telle que $(a_i, a_{i+1}) \in D$ pour tout $0 \leq i < k$. En appliquant ax (a_i, a_{i+1}) le raisonnement fait ci-dessus sur (a,b), on montre qu'il existe $\alpha, \beta > 0$ tels que $\alpha|u|_c = \beta|v|_c$ et $\alpha|u|_d = \beta|v|_d$. Par conséquent on peut appliquer 6.3 ii) et la solution (u,v) est cyclique.