Pavages : quasi-périodicité

On fixe un ensemble $\mathcal{T}$ fini de tuiles.

Une *configuration* est une application $c : \mathbb{Z}^2 \mapsto \mathcal{T}$.

Un *motif* carré de côté n est une application $m : [\![1,n]\!] \times [\![1,n]\!] \mapsto \mathcal{T}$. On note $\ell(m) = n$.

Le motif m *apparaît* dans la configuration c s'il existe $(i,j) \in \mathbb{Z}^2$ tel que m soit la restriction de c à $[\![i, i+n-1]\!] \times [\![j, j+n-1]\!]$; on dit aussi que m est *extrait* de c. On définit de façon analogue la notion de motif extrait d'un autre motif (plus grand).

On note $\mathcal{M}_n(c)$ l'ensemble des motifs carrés de côté n extraits de c, et $\mathcal{M}(c) = \bigcup_{n \geqslant 1} \mathcal{M}_n(c)$.

Soit d une autre configuration ; on note $c \prec d$ si $\mathcal{M}(c) \subset \mathcal{M}(d)$. La relation $\prec$ est un préordre sur l'ensemble des configurations.

Nous dirons que c est *quasi-périodique* si, quel que soit le motif $m \in \mathcal{M}(c)$, il existe $n_m \geqslant \ell(m)$ tel que m apparaît dans tout motif carré de côté n_m extrait de c.

Exemple : si c est doublement périodique, de périodes p et q, alors c est quasi-périodique avec $n_m = \ell(m) + 2\max(p,q) - 2$.

Exemple : la configuration c définie par $c(i,j) : \delta_{i,0}\delta_{j,0}$ n'est pas quasi-périodique.

Soient m un motif et c une configuration ; considérons l'ensemble des $n \geqslant 1$ tels que m apparaît dans tout motif carré de côté n extrait de c. Le *rang* de m vis-à-vis de cette configuration, noté $\rho_c(m)$, est le plus petit élément de cet ensemble s'il n'est pas vide, $+\infty$ sinon. Notons que $\rho_c(m) \geqslant \ell(m)$.

Un motif m apparaissant dans une configuration c est *régulier* pour cette configuration si $\rho_c(m) < +\infty$; sinon, il est dit *critique*.

Remarque : c est quasi-périodique ssi tous les motifs extraits de c sont réguliers pour c.

Lemme 1 : si m est critique pour c, il existe $d \prec c$ tel que $m \notin \mathcal{M}(c)$.

Preuve : notons $n = \ell(m)$. Il existe un motif $m_0 \in \mathcal{M}_n(c)$ distinct de m, et ayant une infinité d'occurrences dans c. Il existe alors un motif $m_1 \in \mathcal{M}_{n+2}(c)$ ayant une infinité d'occurrences dans c, au centre duquel apparaît m_0, et dans lequel n'apparaît pas m. On peut poursuivre indéfiniment cette construction : supposons obtenu un motif $m_k \in \mathcal{M}_{n+2k}$, ayant une infinité d'occurrences dans c ; il existe un motif $m_{k+1} \in \mathcal{M}_{n+2(k+1)}$, ayant une infinité d'occurrences dans c, au centre duquel apparaît m_k, et dans lequel n'apparaît pas m. Superposons ces motifs, leur centre commun étant en $(0,0)$: on obtient une configuration d extraite de c, et ne contenant pas le motif m.

Théorème : c est quasi-périodique ssi c est minimal vis-à-vis de $\prec$.

Preuve du sens direct : soit $d \prec c$. Tout motif $m \in \mathcal{M}(c)$ apparaît dans tout carré de côté $\rho_c(m)$ extrait de c, et à plus forte raison dans tout carré de côté $\rho_c(m)$ extrait de d, donc $m \in \mathcal{M}(d)$, si bien que $c \prec d$.

Preuve de la réciproque : supposons c non quasi-périodique. Soit m un motif critique de c ; d'après le lemme 1, il existe une configuration d extraite de c mais dans laquelle m n'apparaît pas. d minore *strictement* c pour la relation $\prec$, si bien que c n'est pas minimal pour cette relation.

Lemme 2 : si m est critique pour c, et si $c \prec d$, alors m est critique pour d.

Preuve : pour tout n, m est absent d'au moins un motif de côté n extrait de c, donc de d.

Théorème : si le jeu de tuiles $\mathcal{T}$ permet de paver le plan, alors il permet de le paver de façon quasi-périodique.

Preuve : soit c un pavage réalisé avec $\mathcal{T}$. Si c ne possède qu'un nombre fini de motifs critiques, on peut les éliminer l'un après l'autre avec le lemme 1, pour obtenir un pavage quasi-périodique.

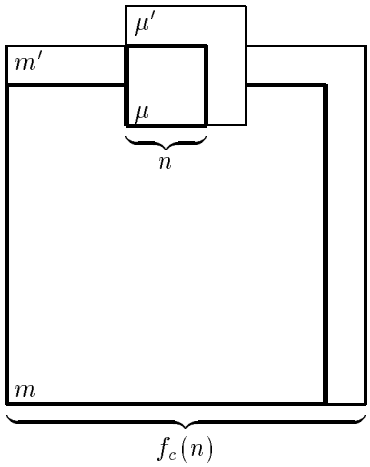
Sinon, comme l'ensemble des motifs est dénombrable, on peut, toujours avec le lemme 1, construire une suite $(c_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de pavages tels que $c_{k+1} \prec c_k \prec c$. Soit $m_k \in \mathcal{M}_k(c_k)$: le procédé d'extraction diagonale utilisé pour la preuve du lemme 1 peut être utilisé à nouveau ici, pour obtenir un pavage γ extrait de c, et ne contenant aucun motif critique.

Remarque : cette preuve n'est pas constructive.

Définition : la *fonction de quasi-périodicité* d'une configuration c quasi-périodique est l'application f_c qui, à $n \in \mathbb{N}$, associe $f_c(n) = \min\{\rho_c(m) \mid m \in \mathcal{M}_n(c)\}$. $f_c(n)$ est donc le plus petit naturel N tel que, dans tout motif carré de côté N, tous les motifs de côté n apparaissent au moins une fois.

Théorème : f est strictement croissante.

Preuve : que f soit croissante est claire. Pour la croissance stricte, observer la figure ci-dessous.



m est un motif carré de côté $\ell(m) = f_c(n) - 1$, et dans lequel n'apparaissent pas tous les motifs carrés de côté n. m' est le motif carré de côté $\ell(m') = \ell(m) + 1 = f_c(n)$ obtenu en « bordant » m par une rangée au-dessus et une colonne à droite. μ est un motif carré de côté $\ell(\mu) = n$ qui n'apparaît pas dans m ; comme il apparaît nécessairement dans m', il est calé contre le bord haut ou le bord droit de celui-ci. Soit alors μ' le motif carré de côté $\ell(\mu') = \ell(mu) + 1$ obtenu en bordant μ comme il a été fait pour m. μ' n'apparaît pas dans m' (sinon, μ apparaîtrait dans m) donc $f_c(n+1) > f_c(n)$.

Définition : la *fonction de complexité* de la configuration c est l'application g_c qui, à $n \in \mathbb{N}$, associe le cardinal de $\mathcal{M}_n(c)$. Il est clair que g_c est croissante.

Théorème : soit c une configuration quasi-périodique. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- c est périodique
- la suite de terme général $f_c(n) - n$ stationne
- g_c stationne
- il existe un indice n_0 tel que $g_c(n_0 + 1) = g_c(n_0)$

Preuve : $1 \Rightarrow 2$ et $3 \Leftrightarrow 4$ sont clairs ; $2 \Rightarrow 3$ se déduit de la majoration $g_c(n) \leqslant \big(f_c(n) - n + 1\big)^2$; pour $3 \Rightarrow 1$, il suffit de noter que, n_0 désignant l'indice à partir duquel g_c stationne, toute bande (horizontale ou verticale) de largeur n_0 est périodique.

Théorème : c est quasi-périodique ssi $f_c(n) - n$ est borné.