# Pavages de Wang

Une *tuile de Wang* est un carré dont les quatre côtés sont marqués (avec un signe particulier ou une couleur, par exemple).

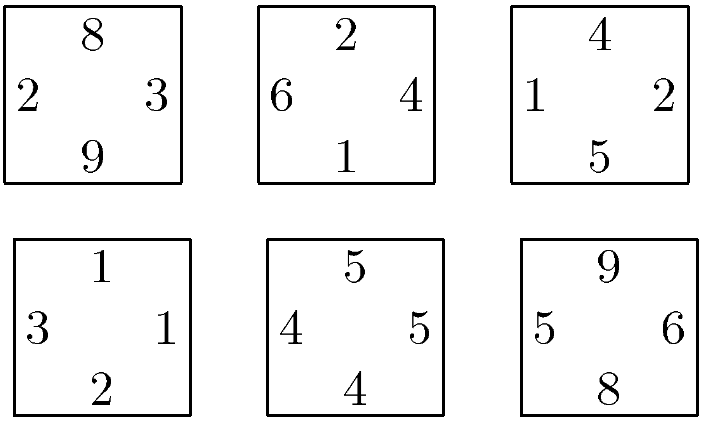
On réalise un *pavage de Wang* en plaçant de telles tuiles côte à côte (sans les faire tourner), de façon que les marques adjacentes soient identiques ; un pavage de Wang est donc une application $f$ de $\mathbb{Z}^2$ vers le jeu de tuiles, respectant certaines contraintes (locales).

Problème de Wang : un jeu (fini) de tuiles de Wang donné permet-il de paver le plan ?

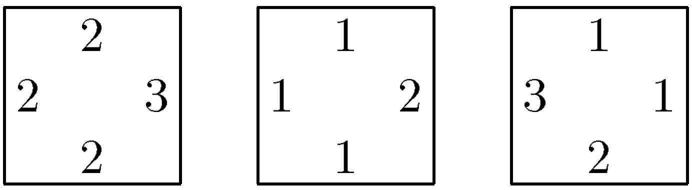
Ce problème est *décidable* s'il existe un algorithme qui prend en entrée un jeu de tuiles de Wang, et dit si l'on peut paver le plan avec ce jeu.

# Exemples de jeux de tuiles

On peut paver le plan avec ce premier jeu de tuiles :



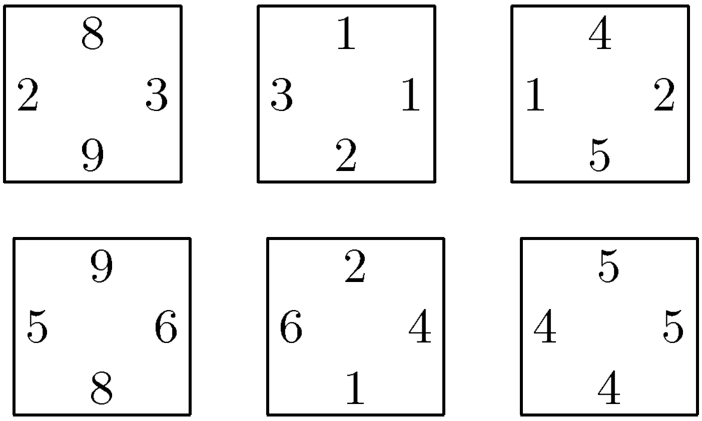

On ne peut pas paver le plan avec ce deuxième jeu de tuiles :



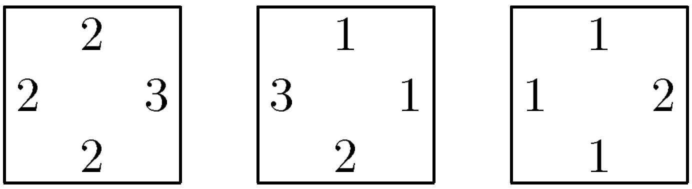

Exercice : démontrez-le !

# Solutions

Premier jeu de tuiles : on pave un rectangle $2 \times 3$, qui fournit un pavage de période $(3, 2)$.




Deuxième jeu de tuiles : il n'y a qu'une façon d'aligner les tuiles horizontalement, or le rapport 1/2 n'est pas le même sur le bord haut et sur le bord bas.



# Périodicité

Un pavage de Wang $f$ est *doublement périodique* s'il existe $a$ et $b$ tous deux non nuls tels que

$$f(x+a,y) = f(x,y+b) = f(x,y)$$

quel que soit $(x,y) \in \mathbb{Z}^2$.

Un pavage est *simplement périodique* s'il existe $(a,b)$ non nul tel que $f(x+a,y+b) = f(x,y)$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{Z}^2$.

Théorème (Wang) : si un jeu de tuiles permet de réaliser un pavage simplement périodique, alors il permet aussi de réaliser un pavage doublement périodique.

Preuve : on se contentera du cas $b = 0$.

Un jeu de tuiles de Wang est *apériodique* s'il permet de paver le plan, mais pas de façon périodique.

# Théorèmes et conjectures

Théorème : si un jeu de tuiles de Wang permet de paver des carrés arbitrairement grands, il permet de paver le plan entier.

Preuve : c'est le lemme de Koenig.

Théorème (Wang) : s'il n'existe pas de jeu de tuiles apériodique, alors le problème de Wang est décidable.

Conjecture (Wang) : il n'existe pas de jeu de tuiles apériodique.

Théorème (Berger 1966) : il existe des jeux de tuiles apériodiques, et le problème de Wang n'est pas décidable.

*Berger a exhibé un jeu apériodique de 20426 tuiles...*

# Suites de Beatty

Au réel $\alpha$, on associe la *suite de Beatty* de terme général $A(\alpha)_i = \lfloor i\alpha \rfloor$, où $i \in \mathbb{Z}$.

La suite $B(\alpha)$ de terme général

$$B(\alpha)_i = A(\alpha)_{i+1} - A(\alpha)_i$$

est la *représentation équilibrée* de $\alpha$ ; elle est aussi connue sous les noms de *suite caractéristique*, ou *suite de Christoffel.*

Remarque : si $k \leqslant \alpha \leqslant k+1$ (où $k \in \mathbb{Z}$) alors les termes de la suite $B(\alpha)$ sont égaux à $k$ ou à $k+1$. De plus :

$$\left| \ell\alpha - \sum_{j \leqslant i < j+\ell} B(\alpha)_i \right| < 1$$

*Note du relecteur : cette inégalité n'a aucun intérêt. Le présentateur veut juste se faire mousser.*

*Note du présentateur : le relecteur est prié d'aller voir là-haut sur la colline.*

# Automates à deux bandes

Un *automate à deux bandes* est un quadruplet $(Q, \Sigma, \Delta, \gamma)$ où $Q$ est l'ensemble (fini) des états, $\Sigma$ l'alphabet d'entrée, $\Delta$ l'alphabet de sortie et $\gamma \subset Q \times \Sigma \times \Delta \times Q$ est la table des transitions.

Soient $x \in \Sigma^{\mathbb{Z}}$ et $y \in \Delta^{\mathbb{Z}}$ deux mots biinfinis ; on dira que l'automate associe $y$ à $x$ s'il existe une suite $(s_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ d'états telle que

$$(s_i, x_i, y_i, s_{i+1}) \in \gamma \text{ pour tout } i \in \mathbb{Z}$$

# Multiplication par $q = \frac{n}{m}$

Soit $q = \frac{n}{m}$ un rationnel positif ; construisons un automate à deux bandes $M_q$ qui réalise (en un certain sens) la multiplication par $q$ d'un réel donné par sa représentation équilibrée.

Les états de $M_q$ sont les valeurs possibles de $q\lfloor x \rfloor - \lfloor qx \rfloor$ lorsque $x$ décrit $\mathbb{R}$.

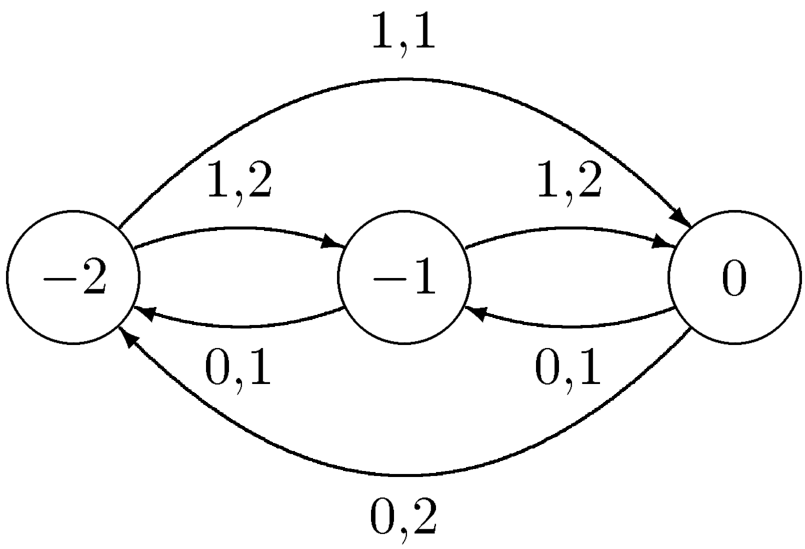
Comme $-q < \lfloor qx \rfloor - q\lfloor x \rfloor < 1$, et que ces valeurs sont des multiples de $\frac{1}{m}$, on aura $M_q = \left\{-\frac{n-1}{m}, -\frac{n-2}{m}, \ldots, \frac{m-2}{m}, \frac{m-1}{m}\right\}$.

Les alphabets d'entrée et de sortie sont des parties finies de $\mathbb{Z}$ ; les transitions de $M_q$ sont les quadruplets $(s, a, b, t)$ tels que $s + qa = b + t$.

On vérifie que, si $B(\alpha)$ peut être écrit avec l'alphabet $\Sigma$ et $B(q\alpha)$ avec l'alphabet $\Delta$, alors l'automate associe $B(q\alpha)$ à $B(\alpha)$ : pour s'en convaincre, prendre $s_i = qA(\alpha)_i - A(q\alpha)_i$.

# Multiplication par 3

Exemple : l'automate à deux bandes $M_3$ ci-dessous effectue la multiplication par 3 d'un réel $\alpha \in \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$ ; plus précisément, si $\alpha \in \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$ alors l'automate associe $B(3\alpha)$ à $B(\alpha)$.



# Exemple de multiplication par 3

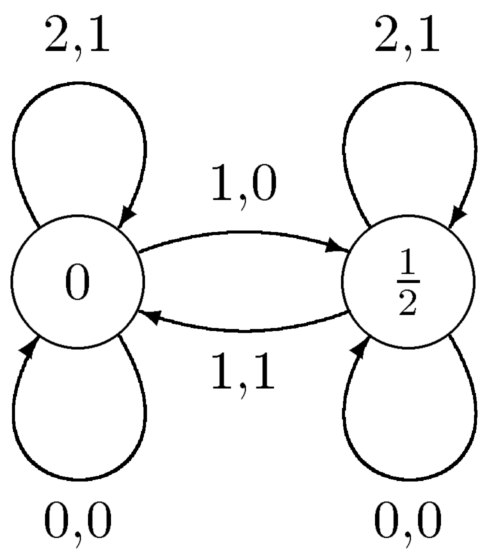
$\alpha = \frac{2}{5}$ a pour représentation équilibrée $\ldots 00101 \ldots$

$3\alpha = \frac{6}{5}$ a pour représentation équilibrée $\ldots 11112 \ldots$

| $i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $A(\alpha)_i$ | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 2 |
| $A(3\alpha)_i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 6 |
| $s_i$ | 0 | $-1$ | $-2$ | 0 | $-1$ | 0 |
| $x_i$ | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| $y_i$ | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 |
| $s_{i+1}$ | $-1$ | $-2$ | 0 | $-1$ | 0 | $-1$ |

# Multiplication par $\frac{1}{2}$

De même, l'automate à deux bandes $M_{1/2}$ ci-dessous associe $B(\alpha/2)$ à $B(\alpha)$ pour $\alpha \in [0, 2]$ ; l'alphabet d'entrée est $\{0, 1, 2\}$ tandis que l'alphabet de sortie est $\{0, 1\}$.



# Le jeu de tuiles de Kari et Čulik

À la transition $(s, a, b, t)$ nous associons la tuile de Wang ci-dessous :

$$\boxed{\begin{array}{ccc} & a & \\ s & & t \\ & b & \end{array}}$$

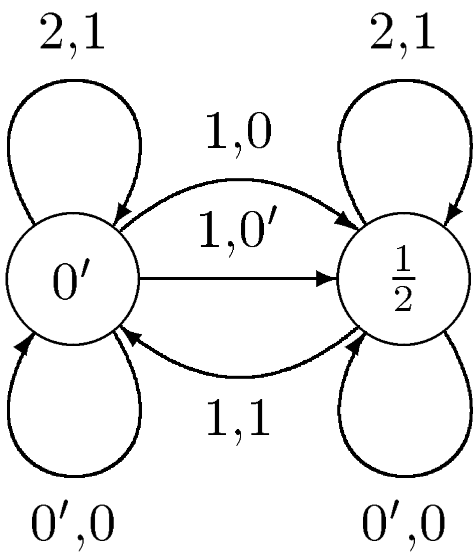
À l'automate $M_3$ exhibé précédemment, nous associons donc le jeu de 6 tuiles $T_3$ ci-dessous :

$$\boxed{\begin{array}{ccc} & 0 & \\ 0 & & -1 \\ & 1 & \end{array}} \quad \boxed{\begin{array}{ccc} & 0 & \\ -1 & & -2 \\ & 1 & \end{array}} \quad \boxed{\begin{array}{ccc} & 1 & \\ -2 & & -1 \\ & 2 & \end{array}}$$

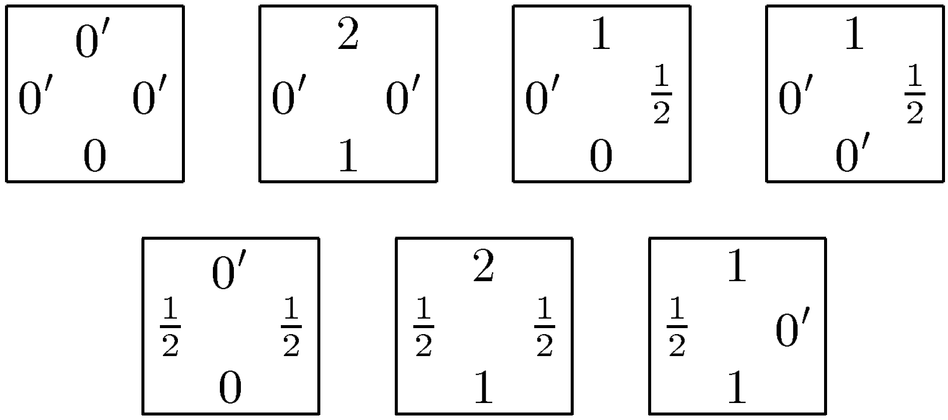
$$\boxed{\begin{array}{ccc} & 1 & \\ -1 & & 0 \\ & 2 & \end{array}} \quad \boxed{\begin{array}{ccc} & 1 & \\ -2 & & 0 \\ & 1 & \end{array}} \quad \boxed{\begin{array}{ccc} & 0 & \\ 0 & & -2 \\ & 2 & \end{array}}$$

Il est clair que ce jeu ne permet pas, à lui tout seul, de paver le plan.

Pour des raisons techniques qui s'éclairciront plus tard, nous utiliserons pour la multiplication par $\frac{1}{2}$ l'automate $M'_{1/2}$ ci-dessous : ses états sont $0'$ et $\frac{1}{2}$ ; l'alphabet d'entrée est $\{0', 1, 2\}$, celui de sortie est $\{0, 0', 1\}$. Les états sont $0'$ et $\frac{1}{2}$ ; ses transitions sont celles de $M_{1/2}$ (dans lesquelles on remplace l'état et la lettre d'entrée 0 par $0'$), plus une nouvelle transition $(0', 1, 0', \frac{1}{2})$.



À cet automate nous associons donc le jeu de tuiles $T'_{1/2}$ ci-dessous.




Ce jeu ne permet pas non plus de paver le plan entier : les tuiles avec un 2 sur la rangée supérieure et celles avec un 0 sur la rangée inférieure ne peuvent être utilisées ; les deux tuiles restantes ne peuvent alors suffire.

Remarquons au passage que l'on peut paver trois rangées horizontales consécutives avec ce jeu ; mais, ensuite, on est bloqué !

Notons $M$ l'automate obtenu en réunissant $M_3$ et $M'_{1/2}$, et $T = T_3 \cup T'_{1/2}$.

## Des pavages apériodiques, enfin !

Théorème : $T$ permet de réaliser une infinité non dénombrable de pavages apériodiques du plan.

Preuve : fixons $\alpha \in \left[\frac{1}{3}, 2\right]$. L'automate $M$ permet de calculer $B(3\alpha)$ si $\alpha \in \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$, $B(\alpha/2)$ si $\alpha \in \left[\frac{2}{3}, 2\right]$. Inversement, il existe une entrée $B(\alpha/3)$ si $\alpha \in [1, 2]$ ou $B(2\alpha)$ si $\alpha \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ à laquelle cet automate associe $B(\alpha)$.

Traduisons ceci en termes de pavages : à chaque $\alpha \in \left[\frac{1}{3}, 2\right]$ on peut associer un pavage du plan. Si $\alpha$ et $\beta$ ne sont pas commensurables, leurs représentations équilibrées ne peuvent apparaître dans un même pavage.

# Apériodicité de $T$

Théorème : le jeu de tuiles $T$ est apériodique.

Preuve : par l'absurde.

Soit $f$ un pavage (doublement) périodique réalisé avec $T$, de périodes horizontale $a$ et verticale $b$. Chaque rangée est réalisée avec des tuiles de l'un des jeux $T_3$ ou $T'_{1/2}$ (grâce à l'introduction de la lettre $0'$).

Comme aucun de ces jeux ne permet à lui tout seul de paver le plan, chacun d'eux sert au moins une fois.

Pour fixer les idées, supposons la rangée 0 formée avec le jeu $T_3$.

Notons $n_i$ la somme des marques des arêtes supérieures des tuiles $f(i, j)$ pour $1 \leqslant j \leqslant b$ ; le report entrant par l'arête gauche de la tuile $f(i, 1)$ étant égal au report sortant par l'arête droite de la tuile $f(i, b)$ on a $n_{i-1} = q_i n_i$ où $q_i$ vaut 3 ou $\frac{1}{2}$ selon que c'est le jeu $T_3$ ou le jeu $T'_{1/2}$ qui est utilisé pour paver la rangée $i$.

La périodicité impose alors

$$n_b = n_0 = q_1 q_2 \dots q_b n_b$$

comme la rangée 0 est pavée avec le jeu $T_3$, on a $n_0 \neq 0$ donc $q_1 q_2 \dots q_b = 1$ mais ceci est contradictoire.

## Conclusion

Le jeu apériodique que l'on a construit comporte treize tuiles. On peut remplacer les marques placées sur les côtés par des couleurs ; en notant que les couleurs utilisées sur les côtés horizontaux peuvent fort bien être reprises pour les côtés verticaux, on constate que *cinq* couleurs suffisent (alors que, dans la construction, sept marques différentes ont été utilisées).

Il semble que ce jeu apériodique soit le plus petit connu, à ce jour.

# Complément personnel

Notons $\varphi$ l'application qui, à $\alpha \in \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right[$ associe $3\alpha$ et à $\alpha \in [1, 2[$ associe $\frac{\alpha}{2}$. Notons $g : \alpha \in \left[\frac{1}{3}, 2\right[ \mapsto \frac{\ln \alpha + \ln 3}{\ln 6}$ ; $g$ réalise une bijection de $\left[\frac{1}{3}, 2\right[$ sur $[0, 1[$.

Considérons alors $g \circ \varphi \circ g^{-1}$ ; notant $s = \frac{\ln 3}{\ln 6}$ on a $g(x) = x + 1 - s$ si $0 \leqslant x < s$ et $g(x) = x - s$ si $s \leqslant x < 1$. $g$ est donc une *rotation* de l'intervalle $[0, 1[$. Comme 2 et 3 sont multiplicativement indépendants, $s$ est irrationnel, et les orbites sous l'action de $g$ sont codables par des mots sturmiens (cf. Agreg 94).

L'apparition de mots sturmiens (biinfinis) ne doit pas surprendre, ceux-ci étant les mots apériodiques de complexité minimale.

# Références

HAO WANG. Proving theorems by pattern recognition II. *Bell System Tech. J.*, 40 : 1-41, 1961.

ROBERT BERGER. The undecidability of the domino problem. *Memoirs of the AMS*, 66 : 201-213, 1966.

JARKKO KARI. A small aperiodic set of Wang tiles. *Discrete Mathematics*, 160 : 259-264, 1996.

KAREL ČULIK II. An aperiodic set of 13 Wang tiles. *Discrete Mathematics*, 160 : 245-251, 1996.

CYRIL ALLAUZEN, BRUNO DURAND. Pavages du plan : indécidabilité et apériodicité. *Rapport de Recherche 95-28*, École Normale Supérieure de Lyon.

Merci à JEAN BERSTEL, KAREL ČULIK, BRUNO DURAND et, *last but not least*, YVES DUVAL.