$\boxed{\text{Récurrences } \textit{diviser pour régner}}$

Notations

Soient $(x_n)_{n\geqslant 1}$ et $(y_n)_{n\geqslant 1}$ deux suites de réels ; on note $x_n = \Omega(y_n)$ lorsque $y_n = \mathcal{O}(x_n)$; on note $x_n = \Theta(y_n)$ lorsque l'on a simultanément $x_n = \mathcal{O}(y_n)$ et $x_n = \Omega(y_n)$.

La partie entière du réel x est notée $\lfloor x \rfloor$.

On note $\lceil x \rceil$ la « partie entière supérieure » de x, *id est* : le plus petit relatif supérieur ou égal à x ; on a donc $\lceil x \rceil \in \mathbb{Z}$ et $\lceil x \rceil - 1 < x \leqslant \lceil x \rceil$.

Soient : $p \in \mathbb{N}^*$; $(\lambda_k)_{1\leqslant k\leqslant p}$ une famille de réels strictement positifs ; $(\alpha_k)_{1\leqslant k\leqslant p}$ une famille de réels strictement supérieurs à 1 ; a un réel positif ou nul. On note $S = \sum\limits_{1\leqslant k\leqslant p} \lambda_k$.

$\boxed{\textbf{Dans toute la suite, on suppose } S > 1.}$

On constate alors que l'application $\varphi : t \geqslant 0 \mapsto \sum\limits_{1\leqslant k\leqslant p} \dfrac{\lambda_k}{{\alpha_k}^t}$ est continue et strictement décroissante, donc réalise une bijection de $[1, +\infty[$ sur $]0, S]$. Par conséquent, il existe un et un seul exposant $\gamma > 0$ tel que $\sum\limits_{1\leqslant k\leqslant p} \dfrac{\lambda_k}{{\alpha_k}^\gamma} = 1$.

Première partie

Théorème 1 : si une suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ de réels vérifie $u_n \leqslant a + \sum\limits_{1\leqslant k\leqslant p} \lambda_k u_{\lfloor n/\alpha_k \rfloor}$ pour tout $n \geqslant 2$, alors $u_n = \mathcal{O}(n^\gamma)$.

Preuve

• Quitte à remplacer la suite de terme général u_n par celle de terme général $u_n + \dfrac{a}{S - 1\lambda_k}$, on peut supposer $a = 0$.

• Notons $B = u_1$, et établissons la majoration $u_n \leqslant Bn^\gamma$ par récurrence sur n. Pour $n = 1$, la majoration résulte du choix de B. Supposons-la acquise jusqu'au rang n inclus ; pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, on aura $\left\lfloor \dfrac{n+1}{\alpha_k} \right\rfloor \leqslant \dfrac{n+1}{\alpha_k} < n+1$. D'où $\left\lfloor \dfrac{n+1}{\alpha_k} \right\rfloor \leqslant n$ et par suite $u_{\lfloor (n+1)/\alpha_k \rfloor} \leqslant B\left(\left\lfloor \dfrac{n+1}{\alpha_k} \right\rfloor\right)^\gamma$. Alors :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \sum_{1\leqslant k\leqslant p} \lambda_k u_{\lfloor (n+1)/\alpha_k \rfloor} \leqslant \sum_{1\leqslant k\leqslant p} \lambda_k B\left(\left\lfloor \frac{n+1}{\alpha_k} \right\rfloor\right)^\gamma \\ &\leqslant B \sum_{1\leqslant k\leqslant p} \lambda_k \left(\frac{n+1}{\alpha_k}\right)^\gamma = B\left(\sum_{1\leqslant k\leqslant p} \frac{\lambda_k}{{\alpha_k}^\gamma}\right)(n+1)^\gamma = B(n+1)^\gamma \end{aligned}$$

Ceci établit l'assertion au rang $n+1$.

Exemple 2 : recherche dans un $2d$-arbre (Bentley, *CACM* 1975). On est amené à étudier une suite vérifiant la relation de récurrence $C_n \leqslant 2 + 2C_{\lfloor n/4 \rfloor}$. Ici, $p = 1$, $\lambda_1 = 2$ et $\alpha_1 = 4$ si bien que $\gamma = 1/2$ et $C_n = O(\sqrt{n})$.

Théorème 2 : si une suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ de réels vérifie $u_n \geqslant a + \sum\limits_{1\leqslant k\leqslant p} \lambda_k u_{\lfloor n/\alpha_k \rfloor}$ pour tout $n \geqslant 2$, alors $u_n = \Omega(n^\gamma)$.

Preuve : notons $A = 2^{-\gamma} u_1$; nous allons établir la minoration $u_n \geqslant A(n+1)^\gamma$ par récurrence sur n. On aura à plus forte raison $u_n \geqslant An^\gamma$.

Pour $n = 1$, la minoration résulte du choix de A. Supposons-la acquise jusqu'au rang n inclus ; pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, on aura comme précédemment $\left\lfloor \dfrac{n+1}{\alpha_k} \right\rfloor \leqslant n$, donc :

$$u_{\lfloor (n+1)/\alpha_k \rfloor} \geqslant A\left(\left\lfloor \frac{n+1}{\alpha_k} \right\rfloor + 1\right)^\gamma > A\left(\frac{n+1}{\alpha_k}\right)^\gamma$$

ceci car $\lfloor x \rfloor + 1 > x$. On en déduit :

$$u_{n+1} = \sum_{1 \leqslant k \leqslant p} \lambda_k u_{\lfloor (n+1)/\alpha_k \rfloor} \geqslant \sum_{1 \leqslant k \leqslant p} \lambda_k A \Big(\Big\lfloor \frac{n+1}{\alpha_k} \Big\rfloor + 1 \Big)^\gamma$$
$$\geqslant A \sum_{1 \leqslant k \leqslant p} \lambda_k \Big(\frac{n+1}{\alpha_k} \Big)^\gamma = A \sum_{1 \leqslant k \leqslant p} \Big(\frac{\lambda_k}{{\alpha_k}^\gamma} \Big) (n+1)^\gamma = A(n+1)^\gamma$$

Ceci établit l'assertion au rang $n+1$.

Théorème 3 : la donnée de $u_1 > 0$ et la relation de récurrence

$$u_n = a + \sum_{1 \leqslant k \leqslant p} \lambda_k u_{\lfloor n/\alpha_k \rfloor}$$

définissent une suite $(u_n)_{n \geqslant 1}$ de réels positifs ; cette suite vérifie $u_n = \Theta(n^\gamma)$.

Exemple : l'étude de la *suite de Hamming* (Dijkstra, *A Discipline of Programming*) amène à la récurrence $T(n) = a + T(n/2) + T(n/3) + T(n/5)$; avec les notations de l'énoncé, $p = 3$, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$, $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = 3$, $\alpha_3 = 5$. Avec une calculatrice, on trouve $\gamma \approx 1.032812266$ (merci à Michel Quercia), et $T_n = \Theta(n^\gamma)$.

Deuxième partie

Nous allons nous intéresser maintenant aux suites $(u_n)_{n \geqslant 1}$ vérifiant la relation de récurrence $u_n = a + \sum_{1 \leqslant k \leqslant p} \lambda_k u_{\lceil n/\alpha_k \rceil}$.

Commençons par régler un problème urgent : quels sont les termes dont il faut disposer pour « amorcer » la récurrence ? On constate que, pour $\alpha > 1$:

$$\lceil n/\alpha \rceil < n \Leftrightarrow \lceil n/\alpha \rceil \leqslant n - 1 \Leftrightarrow \frac{n}{\alpha} \leqslant n - 1 \Leftrightarrow 1 \leqslant \Big(1 - \frac{1}{\alpha}\Big) n \Leftrightarrow n \geqslant \frac{1}{1 - \frac{1}{\alpha}} = \frac{\alpha}{\alpha - 1} \Leftrightarrow n \geqslant \Big\lceil \frac{\alpha}{\alpha - 1} \Big\rceil$$

Notons $s(\alpha) = \Big\lceil \frac{\alpha}{\alpha - 1} \Big\rceil$ et $N = s(\alpha_1) = \max_{1 \leqslant k \leqslant p} s(\alpha_k)$. Pour être à même de calculer les termes de la suite, il est nécessaire et suffisant de connaître les termes d'indice n compris entre 1 (inclus) et N (exclus).

Théorème 4 : si une suite $(u_n)_{n \geqslant 1}$ de réels vérifie $u_n \geqslant a + \sum_{1 \leqslant k \leqslant p} \lambda_k u_{\lceil n/\alpha_k \rceil}$ pour tout $n \geqslant 2$, alors $u_n = \Omega(n^\gamma)$.

Preuve : notons $A = \min_{1 \leqslant n < N} \frac{u_n}{n^\gamma}$ et prouvons que $u_n \leqslant An^\gamma$ pour tout $n \geqslant 1$. Pour $1 \leqslant n < N$, la minoration résulte du choix de A. Supposons cette minoration acquise jusqu'au rang $n \leqslant N - 1$ inclus. Alors, en utilisant $\Big\lceil \frac{n+1}{\alpha_k} \Big\rceil \leqslant n$ et $\lceil x \rceil \geqslant x$:

$$u_{n+1} = \sum_{1 \leqslant k \leqslant p} \lambda_k u_{\lceil (n+1)/\alpha_k \rceil} \geqslant \sum_{1 \leqslant k \leqslant p} \lambda_k A \Big(\Big\lceil \frac{n+1}{\alpha_k} \Big\rceil \Big)^\gamma \geqslant A \sum_{1 \leqslant k \leqslant p} \lambda_k \Big(\frac{n+1}{\alpha_k} \Big)^\gamma$$
$$= A \Big(\sum_{1 \leqslant k \leqslant p} \frac{\lambda_k}{{\alpha_k}^\gamma} \Big) (n+1)^\gamma = A(n+1)^\gamma$$

Ceci établit l'assertion au rang $n+1$.

Théorème 5 : si une suite $(u_n)_{n \geqslant 1}$ de réels vérifie $u_n \leqslant a + \sum_{1 \leqslant k \leqslant p} \lambda_k u_{\lceil n/\alpha_k \rceil}$ pour tout $n \geqslant 2$, alors $u_n = \mathcal{O}(n^\gamma)$.

Preuve : pour établir cette majoration, il faut travailler un peu plus. Notons $N' = \lfloor \alpha_p (N-1) \rfloor + 1$; pour $k \in [\![1, p]\!]$, on a :

$$n \geqslant N' \Rightarrow n > \alpha_p (N-1) \Rightarrow n > \alpha_k (N-1) \Rightarrow \frac{n}{\alpha_k} > N - 1 \Rightarrow \Big\lceil \frac{n}{\alpha_k} \Big\rceil \geqslant N$$

Soit C un réel strictement supérieur à $\frac{\alpha_1}{\alpha_1 - 1}$; on a certainement $C > 1$. *Remarque* : en fait, on peut prendre $C = \frac{\alpha_1}{\alpha_1 - 1}$ sauf dans le cas où $\alpha_1 = 2$. Notons $B = \max_{N \leqslant n < N'} \frac{u_n}{(n - C)^\gamma}$ et prouvons que $u_n \leqslant B(n-C)^\gamma$ pour tout $n \geqslant N$. Pour $N \leqslant n < N'$, cette majoration résulte du choix de B. Supposons la majoration acquise pour tout indice compris entre N et $N'-1$ inclus. Alors, pour tout $k \in [\![1,p]\!]$, on a $N \leqslant \left\lceil \dfrac{n+1}{\alpha_k} \right\rceil \leqslant n$, donc :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \sum_{1\leqslant k\leqslant p} \lambda_k u_{\lceil (n+1)/\alpha_k \rceil} \leqslant \sum_{1\leqslant k\leqslant p} \lambda_k B\Big(\left\lceil \frac{n+1}{\alpha_k}\right\rceil - C\Big)^\gamma \leqslant B \sum_{1\leqslant k\leqslant p} \lambda_k \Big(\frac{n+1}{\alpha_k} + 1 - C\Big)^\gamma \\ &= B \sum_{1\leqslant k\leqslant p} \frac{\lambda_k}{{\alpha_k}^\gamma}\big(n+1+(1-C)\alpha_k\big) \end{aligned}$$

Mais $1 - C < 1 - \dfrac{\alpha_1}{\alpha_1 - 1} = -\dfrac{1}{\alpha_1 - 1} < 0$; donc $(1-C)\alpha_k \leqslant (1-C)\alpha_1 \leqslant -\dfrac{\alpha_1}{\alpha_1-1} < -C$ si bien que $n+1+(1-C)\alpha_k \leqslant n+1-C$. On en déduit

$$u_{n+1} \leqslant B\Big(\sum_{1\leqslant k\leqslant p} \frac{\lambda_k}{{\alpha_k}^\gamma}\Big)(n+1-C)^\gamma = B(n+1-C)^\gamma$$

ce qui établit la majoration au rang $n+1$.

Théorème 5 : si une suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ de réels vérifie $u_n 0 a + \sum_{1\leqslant k\leqslant p} \lambda_k u_{\lceil n/\alpha_k \rceil}$ pour tout $n \geqslant 2$, alors $u_n = \Theta(n^\gamma)$.

Exemple : l'exercice 8.3 du monumental *Introduction to Algorithms* de Cormen, Leiserson et Rivest propose d'étudier une curieuse méthode de tri, baptisée *Stooges Sort* (référence cinématographique à des comiques américains des années trente, connus en France comme les *Trois Nigauds*). On est amené à étudier la suite $(C_n)_{n\geqslant 2}$ définie par $C_2 = 1$ et $C_n = 3C_{\lceil 2n/3 \rceil}$ pour $n \geqslant 3$. Avec nos notations, $p = 1$, $\lambda_1 = 3$ et $\alpha_1 = 3/2$; donc $\gamma = \frac{\ln 3}{\ln 3/2}$. Idée reprise dans l'exercice IV.10 du *Cours et Exercices d'Informatique*, qui attribue cette méthode aux *Pieds Nickelés*, plus connus du public français.Question apparue également au contrôle du 2 février 1997 du Magistère MMFAI de l'École Normale Supérieure de Paris, sous le nom de *Strangesort*.