

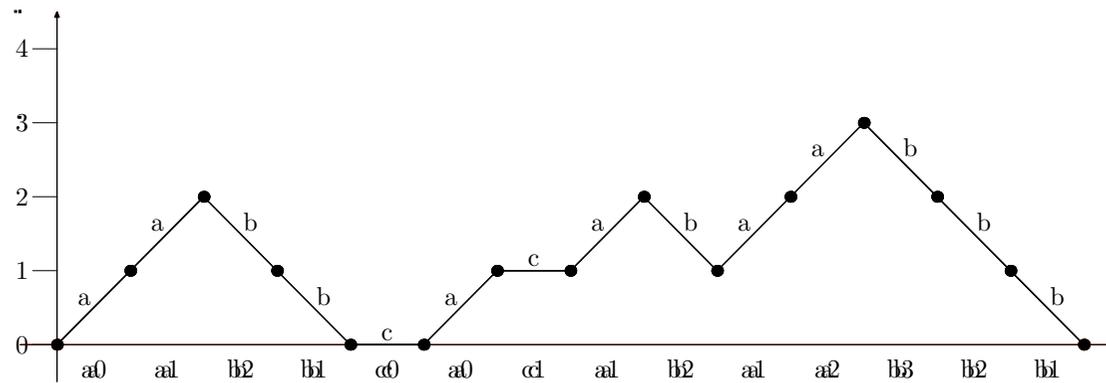
Fractions continues et analyse combinatoire

**Colloque Luminy 2003
Laurent Chéno**

Chemins

- lignes brisées du plan affine
- trois types de segments
 - montée a $(1,1)$
 - descente b $(1,-1)$
 - palier c $(1,0)$
- départ en $(0,0)$ – arrivée en $(n,0)$

Chemins étiquetés



Première correspondance

- ligne brisée à trois types de segments, retournant à $y = 0$
- mot sur un alphabet dénombrable X
- tout préfixe u d'un tel mot w satisfait des relations qui assurent la bonne géométrie du chemin correspondant

$$X = \{a_0, a_1, \dots\} \cup \{b_1, b_2, \dots\} \cup \{c_0, c_1, \dots\}$$

$$\forall u \in \text{Pref}(w), |u|_a \geq |u|_b; \quad |w|_a = |w|_b$$

Vocabulaire

- longueur d'un chemin (ou du mot qui le représente) $n = |u|$
- hauteur d'un chemin/d'un mot $h = \max y$
- \mathcal{P} dénotera l'ensemble des chemins étiquetés (ou des mots)
- le sous-ensemble des chemins de hauteur au plus égale à h sera noté $\mathcal{P}^{[h]}$

Les premiers $\mathcal{P}^{[h]}$

$$\mathcal{P}^{[0]} = c_0^*$$

$$\mathcal{P}^{[1]} = (c_0 + a_0 c_1^* b_1)^*$$

$$\mathcal{P}^{[2]} = (c_0 + a_0 (c_1 + a_1 c_2^* b_2)^* b_1)^*$$

plus généralement, on a la correspondance :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}^{[h]} &\longrightarrow \mathcal{P}^{[h+1]} \\ c_h &\longrightarrow (c_h + a_h c_{h+1}^* b_{h+1}) \end{aligned}$$

Remarque : cette description est non-ambigüe
(unicité de la factorisation)

Séries formelles sur un alphabet

$\mathbb{C}\{X\}$ notera les séries formelles sur l'alphabet X

$$s = \sum_{u \in X^*} s_u \cdot u$$

$$s + t = \sum_{u \in X^*} (s_u + t_u) \cdot u$$

$$s \cdot t = \sum_{u \in X^*} \left(\sum_{u=vw} s_v t_w \right) \cdot u$$

$$\text{val}(s) = \min\{|u|, s_u \neq 0\} \quad \text{val}(0) = +\infty$$

Notion de convergence d'une suite de $C\{X\}$

$$s = \lim_{n \rightarrow +\infty} s_n \iff \text{val}(s - s_n) = +\infty$$

Pseudo-inverse

$$\text{si } \text{val}(u) > 0, \quad (1 - u)^{-1} = \sum_{k \geq 0} u^k$$

Série formelle caractéristique d'un langage

$$\text{car}(L) = \sum_{u \in L} u$$

Propriétés combinatoires fondamentales

$$\text{car}(L + M) = \text{car}(L) + \text{car}(M), \text{ si } L \cap M = \emptyset$$

$$\text{car}(L.M) = \text{car}(L) \cdot \text{car}(M), \text{ si unicité de la factorisation}$$

$$\text{car}(L^*) = (1 - \text{car}(L))^{-1}, \text{ si unicité de la factorisation et si disjonction des } L^k$$

Pour chaque hauteur h , $C^{[h]}$ est la série formelle caractéristique du langage $\mathcal{P}^{[h]}$

Autrement dit:

$$\begin{aligned} X^{[h]} &= \{c_0, c_1, \dots, c_h\} \cup \{a_0, \dots, a_{h-1}\} \cup \{b_1, \dots, b_h\} \\ \mathcal{P}^{[h]} &= \mathcal{P} \cap (X^{[h]})^* \\ C^{[h]} &= \text{car}(\mathcal{P}^{[h]}) \end{aligned}$$

Mais tout chemin de $\mathcal{P}^{[h]} \setminus \mathcal{P}^{[h-1]}$, c'est-à-dire de hauteur exactement égale à h , est de longueur au moins égale à $2h$, et donc :

$$\text{val}(C^{[h]} - C^{[h-1]}) = 2h.$$

$$\lim_{h \rightarrow +\infty} C^{[h]} = \text{car}(\mathcal{P})$$

Récapitulons...

Passage d'une hauteur à la suivante

$$\mathcal{P}^{[h]} \longrightarrow \mathcal{P}^{[h+1]}$$

$$c_h \longrightarrow (c_h + a_h c_{h+1}^* b_{h+1})$$

Limite et série formelle caractéristique

$$\lim_{h \rightarrow +\infty} C^{[h]} = \lim_{h \rightarrow +\infty} \text{car}(\mathcal{P}^{[h]}) = \text{car}(\mathcal{P})$$

Nouvelle notation (pour des séries formelles)

$$\frac{s \mid t}{u} = s.u^{-1}.t$$

Premières séries formelles

$$\mathcal{P}^{[0]} = c_0^*$$

$$\mathcal{P}^{[1]} = (c_0 + a_0 c_1^* b_1)^*$$

$$\mathcal{P}^{[2]} = (c_0 + a_0 (c_1 + a_1 c_2^* b_2)^* b_1)^*$$

Règle de transformation

$$C^{[h]} \longrightarrow C^{[h+1]}$$

$$c_h \longrightarrow c_h + \frac{a_h | b_{h+1}}{1 - c_{h+1}}$$

Théorème fondamental

$$\text{car}(\mathcal{P}) = \frac{1}{1 - c_0 - \frac{a_0 | b_1}{1 - c_1 - \frac{a_1 | b_2}{1 - c_2 - \frac{a_2 | b_3}{1 - c_3 - \dots}}}}$$

Source incontournable voire définitive disponible sur Internet :

Philippe Flajolet, *Combinatorial aspects of continued fractions*
<http://algo.inria.fr/flajolet/Publications/Flajolet80b.pdf>

Premières applications

$$\begin{aligned}
J(X, z) &= \frac{1}{1 - c_0z - \frac{a_0b_1z^2}{1 - c_1z - \frac{a_1b_2z^2}{1 - c_2z - \frac{a_2b_3z^2}{\dots}}}} \\
&= \sum_{n \geq 0} R_n z^n
\end{aligned}$$

Les polynôme R_n (en les lettres de X) sont appelés polynômes de *Jacobi-Rogers*

$R_n \equiv \text{car}(\mathcal{P} \cap X^n)$ (égalité modulo la commutativité des lettres)

La somme des coefficients de R_n est le nombre de Motzkin M_n on en reparlera...

De la même façon, en oubliant les c_k :

Avec $X' = \{a_0, a_1, \dots\} \cup \{b_1, b_2, \dots\}$

$$\begin{aligned} S(X', z) &= \frac{1}{1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{\dots}}}}} \\ &= \sum_{n \geq 0} R'_n z^n \end{aligned}$$

Les polynômes R'_n sont les polynômes de *Stieltjes-Rogers*

$R'_n \equiv \text{car}(\mathcal{P} \cap X'_n)$ (égalité modulo la commutativité des lettres)

La somme des coefficients de R'_n est le nombre de Catalan C_n
on en reparlera...

Nombres de Motzkin

Ils dénombrent les chemins de longueur fixée.
On peut les obtenir par l'application d'un morphisme :

$$\mu : \begin{cases} \mathbb{C}\{X\} & \rightarrow \mathbb{C}[[z]] \\ a_j, b_j, c_j & \mapsto z \end{cases}$$

$$\sum_{n \geq 0} M_n z^n = \frac{1}{1 - z - \frac{z^2}{1 - z - \frac{z^2}{\dots}}} = \frac{1 - z - \sqrt{1 - 2z - 3z^2}}{2z^2}$$

Nombres de Catalan

Ils dénombrent les chemins sans palier (de longueur paire).
On peut les obtenir par l'application d'un morphisme :

$$\mu : \begin{cases} \mathbb{C}\{X\} & \rightarrow & \mathbb{C}[[z]] \\ a_j, b_j & \mapsto & z \\ c_j & \mapsto & 0 \end{cases}$$

$$\sum_{n \geq 0} C_n z^{2n} = \frac{1}{1 - \frac{z^2}{1 - \frac{z^2}{\dots}}} = \frac{1 - \sqrt{1 - 4z^2}}{2z^2}$$

Mais ce n'est pas tout !

- chaque nouveau morphisme permet un nouveau dénombrement
- mais la série génératrice peut être plus difficile à déduire de la fraction continue
- Ramanujan en a examiné de nombreuses
- deux exemples...

Un morphisme...

$$\mu : \begin{cases} \mathbb{C}\{X\} & \rightarrow & \mathbb{C}[[z]] \\ a_j, b_j & \mapsto & z \\ c_j & \mapsto & uz \end{cases}$$

Un résultat...

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 0} M_{n,k} z^n u^k &= \frac{1}{1 - uz - \frac{z^2}{1 - uz - \frac{z^2}{\dots}}} \\ &= \frac{1 - uz - \sqrt{(1 - uz)^2 - 4z^2}}{2z^2} \end{aligned}$$

Une interprétation ?

On dénombre ici les chemins de longueur n possédant k paliers

Un morphisme...

$$\mu : \begin{cases} \mathbb{C}\{X'\} & \rightarrow \mathbb{C}[[z]] \\ a_j, b_j & \mapsto zq^j \end{cases}$$

$$\forall u \in X', \mu(u) = z^{|u|}q^{\alpha(u)}, \quad \text{où } \alpha(u) = \sum y_j$$

Un résultat incomplet...

$$\sum_{n \geq 0} A_{n,k} z^n q^k = \frac{1}{1 - \frac{z^2 q^1}{1 - \frac{z^2 q^3}{1 - \frac{z^2 q^5}{\dots}}}}$$

= Ramanujan, au secours !

Une interprétation ?

On dénombre ici les chemins de longueur n
d'« aire » égale à k

**Généralisons
encore !**

Diagrammes de chemin

(Rosen, Strehl, Dumont, Françon, Viennot)

On introduit une “fonction de possibilité” $\text{pos} : X \rightarrow \mathbb{N}$

Un diagramme de chemin est un couple constitué d'un chemin u et d'une suite s d'entiers, de même longueur n , vérifiant :

$$\forall j, \quad 0 \leq s_j < \text{pos}(u_j)$$

On représente graphiquement un tel diagramme par le tracé habituel du chemin et un ensemble de points :

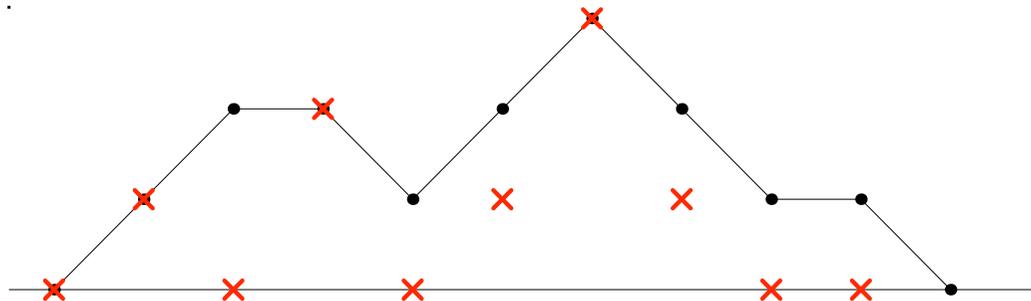
$$P_j \left[\begin{array}{c} j - 1 \\ s_j \end{array} \right], \quad 1 \leq j \leq |u| = |s|$$

On le dénotera par le mot des $u_j^{(s_j)}$ sur l'alphabet

$$Y = \{a_j^{(k)}, 0 \leq j, 0 \leq k\} \cup \{b_j^{(k)}, 1 \leq j, 0 \leq k\} \cup \{c_j^{(k)}, 0 \leq j, 0 \leq k\}$$

Un exemple

$$\text{pos} : \begin{cases} X & \rightarrow \mathbb{N} \\ a_j, b_j, c_j & \mapsto j + 1 \end{cases}$$



$$d = (a_0^{(0)}, a_1^{(1)}, c_2^{(0)}, b_2^{(2)}, a_1^{(0)}, b_3^{(3)}, b_2^{(1)}, c_1^{(0)}, b_1^{(0)})$$

Soit \mathcal{D} l'ensemble des diagrammes de chemin pour une certaine fonction pos. On dispose d'un théorème analogue à celui que nous avons déjà exposé :

$$\text{car}(\mathcal{D}) = \frac{1}{1 - (c_0^{(0)} + \dots + c_0^{(\gamma)}) - \frac{(a_0^{(0)} + \dots + a_0^{(\alpha)}) | (b_1^{(0)} + \dots + b_1^{(\beta)})}{1 - (c_1^{(0)} + \dots + c_1^{(\gamma')}) - \frac{\dots | \dots}{\dots}}$$

avec $\text{pos}(c_0) = 1 + \gamma$; $\text{pos}(a_0) = 1 + \alpha$; $\text{pos}(b_1) = 1 + \beta$; $\text{pos}(c_1) = 1 + \gamma' \dots$

En pratique, nous nous intéresserons essentiellement à des questions de dénombrement et utiliserons plutôt cette version *allégée* et plus *fréquente*.

Notons D_n le nombre de diagrammes de chemins de longueur n et considérons sa série génératrice

$$D(z) = \sum_{n \geq 0} D_n z^n$$

$$D(z) = \frac{1}{1 - \gamma_0 z - \frac{\alpha_0 \beta_1 z^2}{1 - \gamma_1 z - \frac{\alpha_1 \beta_2 z^2}{1 - \gamma_2 z - \frac{\alpha_2 \beta_3 z^2}{\dots}}}}$$

où on a posé $\text{pos}(a_j) = \alpha_j$; $\text{pos}(b_j) = \beta_j$; $\text{pos}(c_j) = \gamma_j$

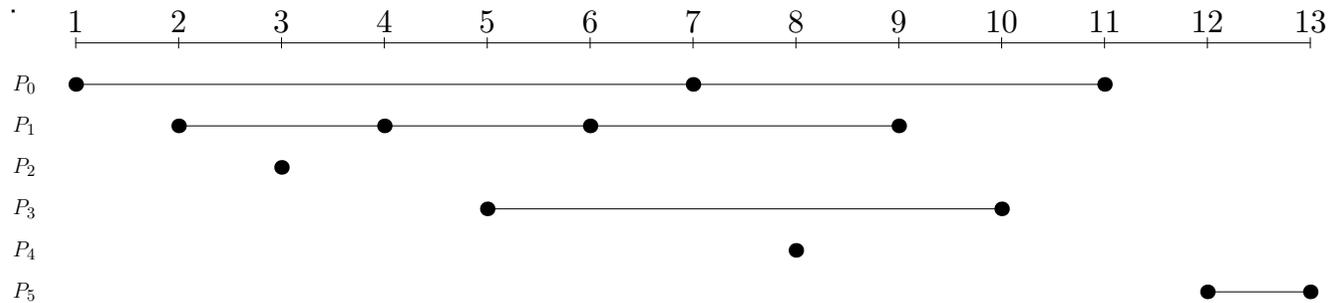
Application 1 : partitions

On définit une bijection entre l'ensemble des partitions de $\{1, \dots, n\}$ et les D_n diagrammes de longueur n associés à la fonction de possibilité définie par

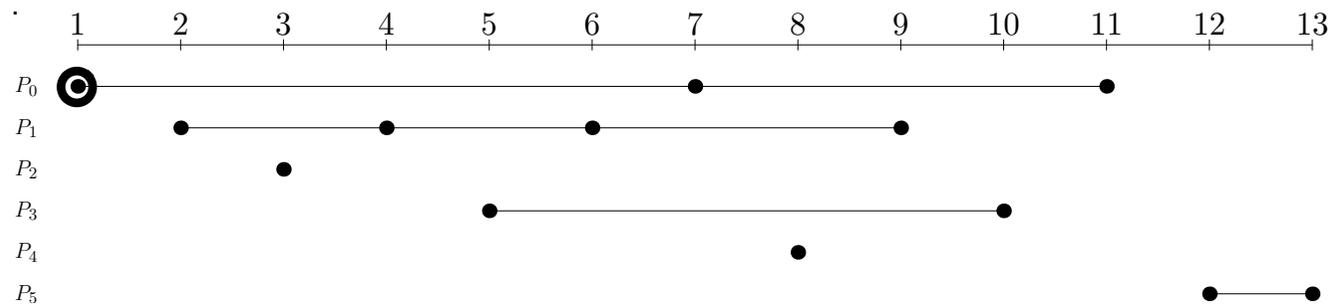
$$\text{pos} : \begin{cases} a_j \mapsto 1 \\ b_j \mapsto j \\ c_j \mapsto j + 1 \end{cases}$$

De plus, la preuve est constructive : on va décrire la correspondance sur un exemple.

Soit $n = 13$ et $\pi = (P_0, P_1, P_2, P_3, P_4, P_5)$ la partition définie par $P_0 = \{1, 7, 11\}$, $P_1 = \{2, 4, 6, 9\}$, $P_2 = \{3\}$, $P_3 = \{5, 10\}$, $P_4 = \{8\}$, $P_5 = \{12, 13\}$.
 On a rangé les classes par ordre croissant de leur élément minimal, et on les a indexées à partir de 0.
 On peut représenter la partition π ainsi :



Nous construisons maintenant le diagramme (u, s) , ou plutôt que u , le chemin non étiqueté v qui lui correspond (sur l'alphabet $\{a, b, c\}$). Pour cela nous considérons tour à tour $j \in \{1, \dots, 13\}$ et nous calculons v_j et s_j .



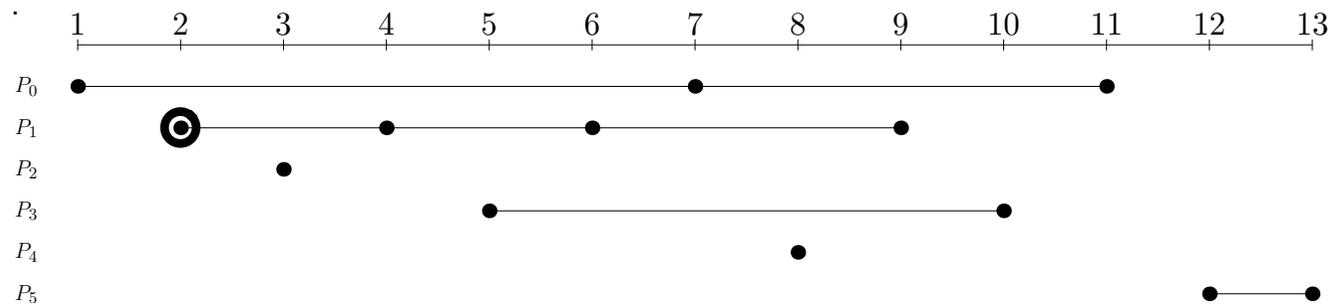
Cas de $j = 1$

Il s'agit d'un point *ouvrant* : c'est-à-dire du minimum d'une classe de la partition, classe non réduite à un singleton.

On pose alors simplement $v_j = a$ et $s_j = 0$.

$$v = a \dots$$

$$s = 0 \dots$$



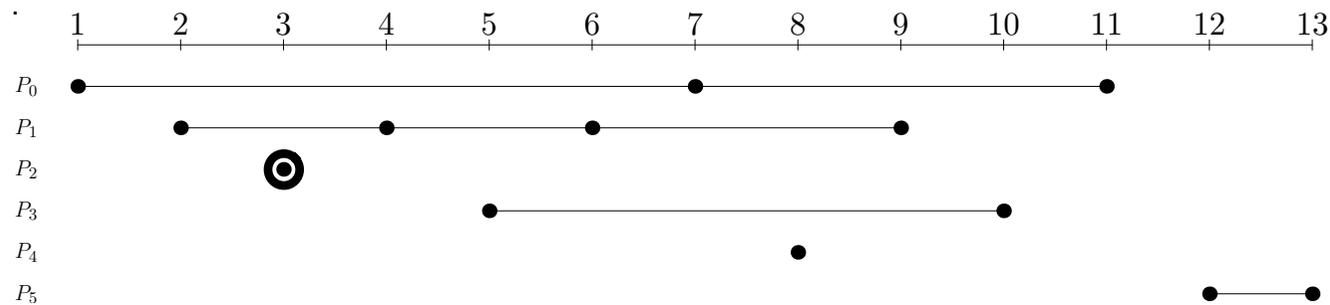
Cas de $j = 2$

Il s'agit d'un point *ouvrant* : c'est-à-dire du minimum d'une classe de la partition, classe non réduite à un singleton.

On pose alors simplement $v_j = a$ et $s_j = 0$.

$$v = aa \dots$$

$$s = 00 \dots$$



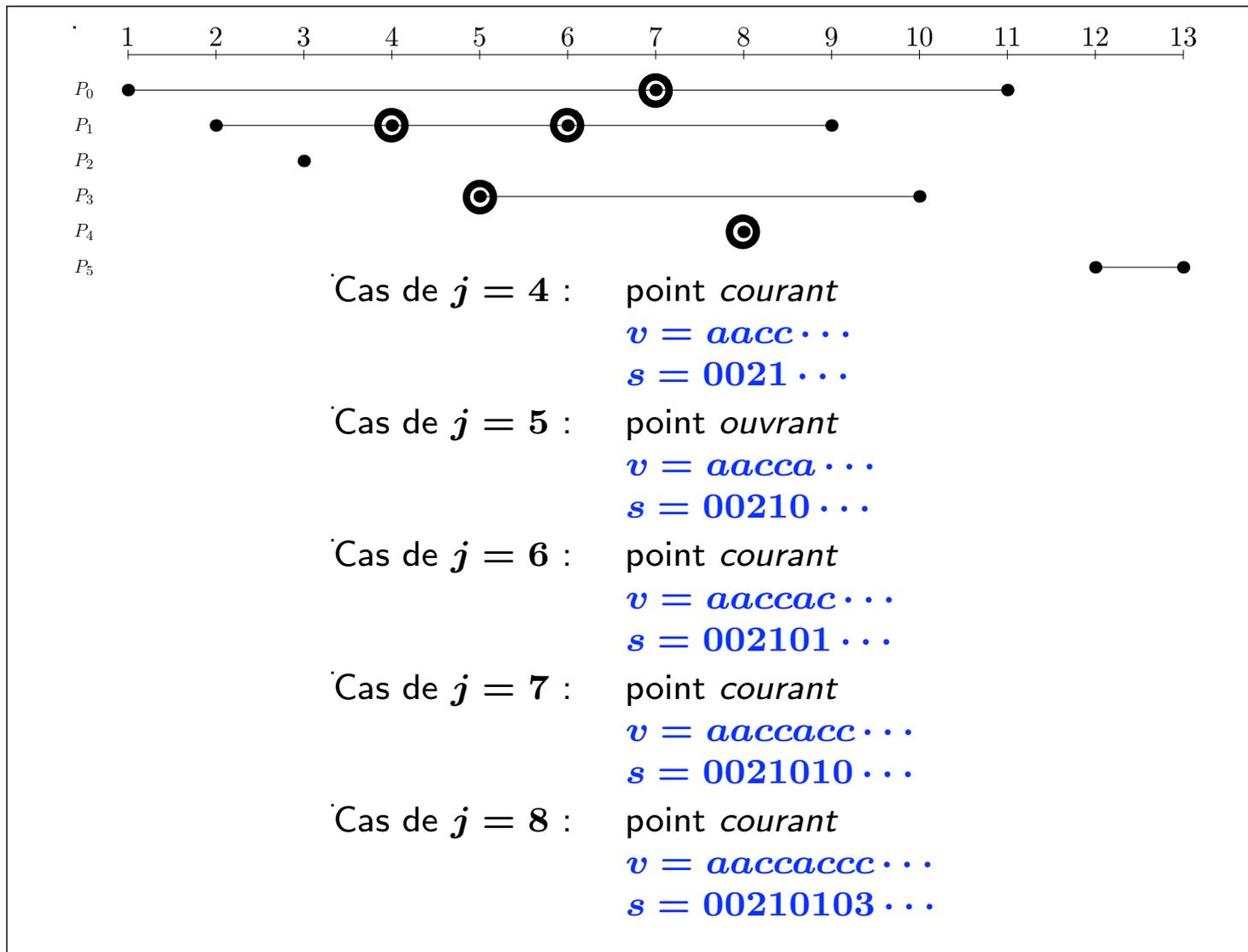
Cas de $j = 3$

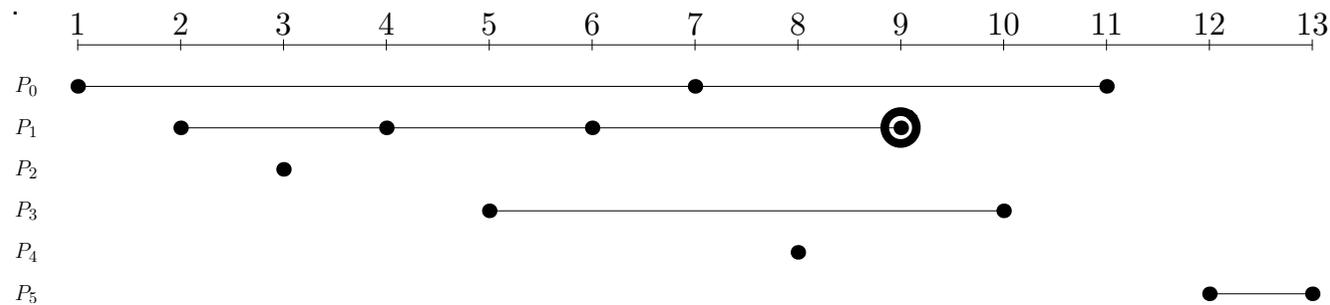
Il s'agit d'un point *courant* : ou bien le seul élément d'une classe-singleton, ou bien ni un minimum ni un maximum de classe.

Dans ce cas $v_j = c$, et s_j est le nombre de classes déjà *ouvertes* mais pas encore *refermées* portant un numéro strictement inférieur à celui de la classe qui contient j .

$v = aac \dots$

$s = 002 \dots$





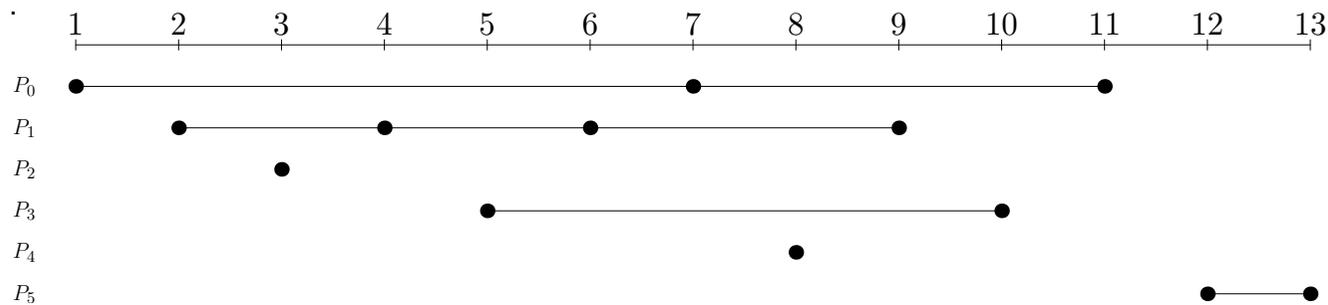
Cas de $j = 9$

Il s'agit d'un point *fermant* : c'est-à-dire du maximum d'une classe de la partition, classe non réduite à un singleton.

Dans ce cas $v_j = b$, et s_j est le nombre de classes déjà *ouvertes* mais pas encore *refermées* portant un numéro strictement inférieur à celui de la classe qui contient j .

$$v = aaccacccb \dots$$

$$s = 002101031 \dots$$



On vérifiera finalement que notre algorithme donne le résultat suivant :

$$v = aaccaccbbab$$

$$s = 0021010311000$$

et donc aussi que

$$u = a_0a_1c_2c_2a_2c_3c_3b_3b_2b_1a_0b_1$$

Inversement quelle est la partition associée à

$$u = a_0c_1a_1b_2c_1a_1c_2c_2b_2b_1 \text{ et } s = 0000101000 ?$$

Il s'agit de $\{1, 2, 9\}, \{2, 3, 4, 8, 10\}, \{6, 5, 10\}, \{6, 7, 8\}$

Nous avons trouvé :

$$\text{car}(\mathcal{D}) = \frac{1}{1 - c_0^{(0)} - \frac{a_0 | b_1^{(0)}}{1 - (c_1^{(0)} + c_1^{(1)}) - \frac{a_1 | (b_2^{(0)} + b_2^{(1)})}{1 - (c_2^{(0)} + c_2^{(1)} + c_2^{(2)}) - \dots}}$$

puisque ici $\text{pos}(c_j) = 1 + j$; $\text{pos}(a_j) = 1$; $\text{pos}(b_j) = j$.

$a_j^{(0)}$ correspond à l'ouverture d'une classe non-singleton
 $b_j^{(\ell)}$ correspond à la fermeture d'une classe non-singleton
 $c_j^{(j)}$ correspond à l'ouverture d'une classe singleton
 $c_j^{(\ell)}$ avec $\ell < j$ à un point d'une classe non-singleton

Considérons donc le morphisme défini par :

$$\mu(a_j) = vz, \mu(b_j) = jz \text{ et } \mu(c_j) = (u + (j - 1)t)z.$$

La variable z compte les entiers parcourus ; la variable v les classes non-singletons ; la variable u les singletons ; la variable t les éléments courants des classes non-singletons.

On en déduit que si $\beta_{k,\ell,m}$ compte les partitions comportant k singletons, ℓ autres classes et m éléments courants des classes non-singletons, alors

$$\begin{aligned} \beta(u, v, t, z) &= \sum_{k,\ell,m} \beta_{k,\ell,m} u^k v^\ell t^m z^{m+k+2\ell} \\ &= \frac{1}{1 - uz - \frac{1 \cdot vz^2}{1 - (u + 1 \cdot t)z - \frac{2 \cdot vz^2}{1 - (u + 2 \cdot t)z - \frac{3 \cdot vz^2}{\dots}}}} \end{aligned}$$

Avec $u = v = t = 1$, on obtient la série génératrice des nombres de Bell B_n (nombre de partitions de n éléments):

$$\sum B_n z^n = \frac{1}{1 - z - \frac{z^2}{1 - 2z - \frac{2z^2}{1 - 3z - \frac{3z^2}{\dots}}}}$$

Souhaite-t-on le nombre de ces partitions sans singleton ? Il suffit de prendre $v = t = 1$ et $u = 0$:

$$\sum B_n^{(2)} z^n = \frac{1}{1 - \frac{z^2}{1 - z - \frac{2z^2}{1 - z - \frac{3z^2}{\dots}}}}$$

Les nombres de Stirling de première espèce $S(n, k)$ comptent les partitions en k parties : posons $u = v$ et $t = 1$, et on obtient :

$$\sum S(n, k) u^k z^n = \frac{1}{1 - uz - \frac{uz^2}{1 - (1+u)z - \frac{2uz^2}{1 - (2+u)z - \frac{3uz^2}{\dots}}}}$$

Veut-on là encore interdire les singletons ? il suffit de poser $u = 0$ et $t = 1$:

$$\sum S^{(2)}(n, k) v^k z^n = \frac{1}{1 - \frac{vz^2}{1 - z - \frac{2vz^2}{1 - 2z - \frac{3vz^2}{\dots}}}}$$

On obtient le nombre I_n d'involutions en posant $u = v = 1$ et $t = 0$:

$$\sum I_n z^n = \frac{1}{1 - z - \frac{z^2}{1 - z - \frac{2z^2}{1 - z - \frac{3z^2}{\dots}}}}$$

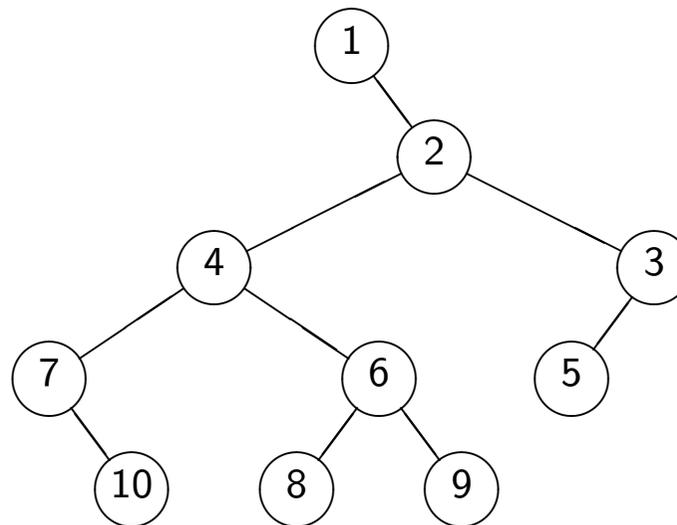
Et de même le nombre J_n d'involutions sans point fixe en posant $u = 0, v = 1$ et $t = 0$:

$$\sum J_n z^n = \frac{1}{1 - \frac{z^2}{1 - \frac{2z^2}{1 - \frac{3z^2}{\dots}}}}$$

Application 2 : permutations

On associe à chaque permutation l'arbre binaire tournoi dont elle est la représentation infixé, comme dans l'exemple suivant.

Si $\sigma = (1, 7, 10, 4, 8, 6, 9, 2, 5, 3)$, on lui associe



On souhaite décrire un algorithme qui associe à un diagramme de chemin (u, s) un tel arbre-tournoi, qui représente une permutation.

Plus précisément, à une permutation de $\{1, \dots, n, n + 1\}$ nous associerons un diagramme de chemin (u, s) de longueur n .

En outre, nous utiliserons un alphabet un peu modifié, en distinguant deux types de paliers : c et c' .

La fonction de possibilité que nous utiliserons ici est la suivante :

$\text{pos}(\alpha_j) = j + 1$, que la lettre α soit a, b, c ou c' .

· Nous insérons tour à tour l'entier j dans un arbre-tournoi vide au départ.

· Le caractère lu dans u (ou dans v) indique le nombre de fils du nouveau nœud introduit :

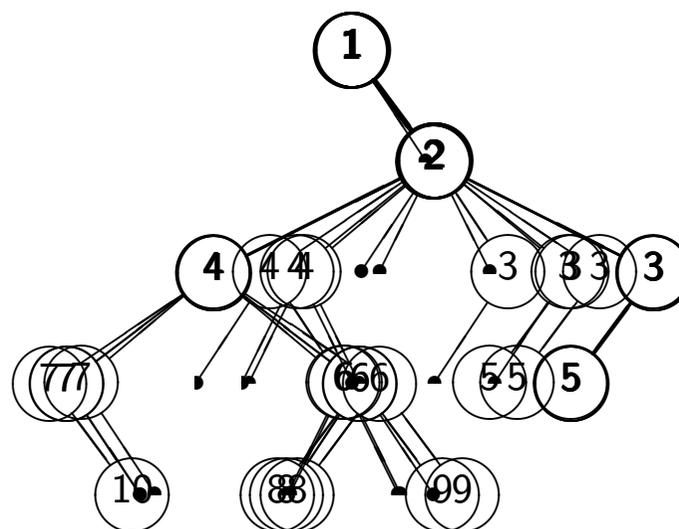
- si $v_j = a$, on insère un nœud avec deux fils libres;
- si $v_j = b$, on insère une feuille (sans fils);
- si $v_j = c$, on insère un nœud avec seulement un fils gauche;
- si $v_j = c'$, on insère un nœud avec seulement un fils droit.

· On vérifie facilement qu'à chaque étape, il y a $1 + h_j$ endroits où insérer j , et c'est justement $s_j \in [0, h_j]$ qui indiquera lequel choisir.

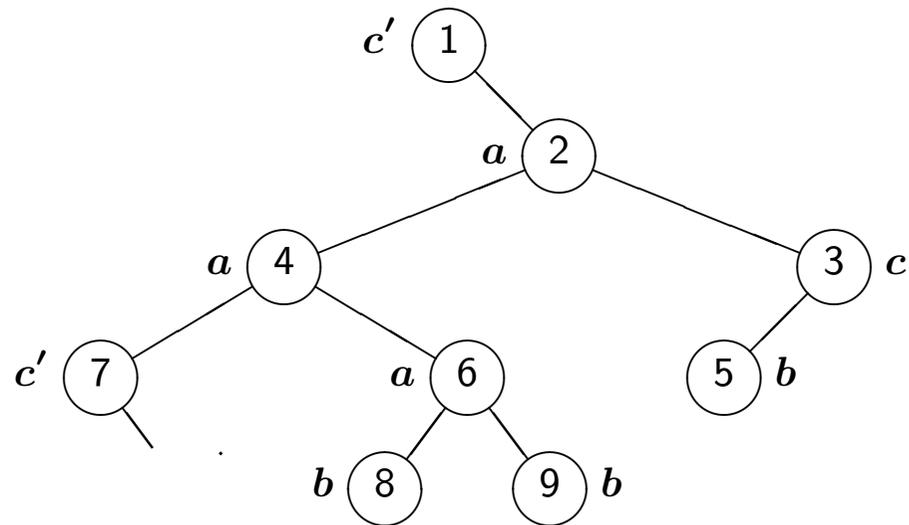
(h_j est la hauteur courante du chemin u .)

Exemple : $n = |u| = |v| = |s| = 9$
 $u = c'_0 a_0 c_1 a_1 b_2 a_1 c'_2 b_2 b_1$

$v =$	c'	a	c	c	b	a	c'	b	b
$s =$	0	0	1	0	2	1	0	1	1



Exemple : $\sigma = (1, 7, 10, 4, 8, 6, 9, 2, 5, 3)$,
 $v = c'acabac'bb$



pic: b
 creux: a
 double-montée: c'
 double-descente: c

Notons alors $P_{k,\ell,m}$ le nombre de diagrammes de longueur $n = 2k + \ell + m$ qui correspondent à des permutations (dans S_{n+1}) comportant k creux (et donc $k + 1$ pics), ℓ doubles-montées et m doubles-descentes.

$$\begin{aligned}
 P(u, v, w, z) &= \sum P_{k,\ell,m} u^k v^\ell w^m z^{2k+\ell+m} \\
 &= \frac{1}{1 - 1(v+w)z - \frac{1 \cdot 2 \cdot uz^2}{1 - 2(v+w)z - \frac{2 \cdot 3 \cdot uz^2}{1 - 3(v+w)z - \frac{3 \cdot 4 \cdot uz^2}{\dots}}}}
 \end{aligned}$$

Bien sûr, il y a $(n + 1)!$ permutations dans S_{n+1} , et il suffit de poser $u = v = w = 1$ pour trouver :

$$\sum (n + 1)!z^n = \frac{1}{1 - 2z - \frac{1.2z^2}{1 - 4z - \frac{2.3z^2}{1 - 6z - \frac{3.4z^2}{\dots}}}}$$

Posant $u = w$ et $v = 1$, on obtient le nombre $A_{n+1,k+1}$ de permutations de S_{n+1} ayant $k + 1$ pics et k doubles-montées, c'est-à-dire $2k + 1$ montées :

$$\sum A_{n+1,2k+1}u^k z^n = \frac{1}{1 - 1.(1 + u)z - \frac{1.2uz^2}{1 - 2.(1 + u)z - \frac{2.3uz^2}{\dots}}}$$

Posant $v = w = 0$ et $u = 1$, on obtient le nombre E_{2n+1} de permutations de S_{2n+1} sans doubles-montées ni doubles-descentes (alternance de pics et de creux) :

$$\sum E_{2n+1} z^{2n} = \frac{1}{1 - \frac{1.2z^2}{1 - \frac{2.3z^2}{1 - \frac{3.4z^2}{\dots}}}}$$

Mais comment obtenir un développement en fraction continue des séries génératrices des E_{2n} ou des $A_{n,2k}$?

L'astuce consiste à identifier S_n avec les permutations de S_{n+1} qui laissent fixe l'entier $n + 1$.

Dans la correspondance avec les diagrammes de chemins que nous avons établie, il suffit pour garantir le point fixe d'imposer $\text{pos}(b_j) = j \neq j + 1$ et $\text{pos}(c'_j) = j \neq j + 1$.

Il s'agit en effet d'interdire (sauf peut-être à la toute dernière étape de construction de l'arbre tournoi) la création dans la position la plus à droite (d'une feuille ou) d'un nœud sans fils gauche.

On obtient ainsi :

$$\sum A_{n,k} u^k z^n = \frac{1}{1 - uz - \frac{1^2 uz^2}{1 - (1 + 2u)z - \frac{2^2 uz^2}{1 - (1 + 3u)z - \frac{3^2 z^2}{\dots}}}}$$

ou encore :

$$\sum E_{2n} z^{2n} = \frac{1}{1 - \frac{1^2 uz^2}{1 - \frac{2^2 uz^2}{1 - \frac{3^2 z^2}{\dots}}}}$$

Merci de votre attention...