Manipulation de polynômes

L'objectif de ce T.P. est d'implémenter les opérations usuelles sur les polynômes à coefficients rationnels. Un polynôme $P(X) = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$ sera représenté par un tableau p indexé par $[\![0,n]\!]$ tel que $p[i] = a_i$.

Les élèves travaillant en Caml devront utiliser la bibliothèque `num` qui implémente l'arithmétique exacte sur les nombres rationnels (entrer `#open "num";;` au début du programme). Les opérations usuelles sur les rationnels sont notées `+/`, `-/`, `*/` et `//`. Le symbole `=/` désigne le test d'égalité entre rationnels et la fonction `num_of_int` permet de convertir un entier ordinaire en rationnel de dénominateur 1.

1) Simplification, addition, soustraction

a) Écrire une fonction `simpl` qui prend en argument un polynôme P représenté par un tableau de coefficients et qui retourne le plus petit tableau représentant P (c'est-à-dire le dernier coefficient du tableau retourné doit être non nul si $P \neq 0$ et le tableau retourné doit être de longueur nulle si $P = 0$). On dira alors que le polynôme est sous forme simplifiée.

b) Écrire des fonctions `somme` et `diff` calculant la somme et la différence de deux polynômes, les résultats étant retournés sous forme simplifiée.

2) Multiplication

a) Écrire une fonction `prod` qui calcule et simplifie le produit de deux polynômes. On utilisera la relation :

$$\left(\sum a_i X^i\right)\left(\sum b_j X^j\right) = \sum_n \left(\sum_{i+j=n} a_i b_j\right) X^n.$$

b) Application. Écrire un programme calculant le n-ème polynôme P_n de la suite définie par les relations :

$$P_0 = 0, \qquad P_{n+1}(X) = P_n(X) + \frac{X - P_n^2(X)}{2}.$$

Cette suite a la propriété remarquable de converger uniformément vers la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ sur l'intervalle $[0,2]$, ne pas prendre de trop grandes valeurs de n pour les essais car on a $\deg(P_n) = 2^{n-1}$.

3) Division euclidienne

Soient $A, B \in \mathbb{Q}[X]$, avec $B \neq 0$, et Q, R le quotient et le reste de la division euclidienne de A par B. Écrire une fonction `diveucl` qui prend en argument les polynômes A et B et qui retourne le couple (Q, R). On peut calculer Q et R par l'algorithme suivant :

```
R <- A, Q <- 0
tant que d°(R) >= d°(B) faire :
    (* ici on a l'invariant de boucle : A = B*Q + R *)
    q <- R[d°(R)]/B[d°(B)]
    R <- R - q*B*X^(d°(R)-d°(B))
    Q <- Q + q*X^(d°(R)-d°(B))
fin tant que
retourner (Q,R)
```

4) Racine carrée

Soit $A \in \mathbb{Q}[X]$ unitaire de degré $2n$. On démontre qu'il existe un couple $(Q, R) \in \mathbb{Q}[X]^2$ unique tel que

$$A = Q^2 + R, \qquad Q \text{ est unitaire de degré } n, \qquad \deg(R) < n.$$

Q est appelé « partie polynomiale de $\sqrt{A}$ » et $R = A - Q^2$ est appelé « reste ». Le couple (Q, R) peut être calculé par un algorithme similaire à celui de la division euclidienne :

```
R <- A-X^(2n), Q <- X^n
tant que d°(R) >= n faire :
    (* ici on a l'invariant de boucle : A = Q^2 + R *)
    q <- R[d°(R)]/2
    R <- R - 2*q*Q*X^(d°(R)-n) - q^2*X^(2(d°(R)-n))
    Q <- Q + q*X^(d°(R)-n)
fin tant que
retourner (Q,R)
```

Programmer cet algorithme. Application : calculer la partie polynomiale de $\sqrt{X^{2n} + X^{2n-1}}$ et interpréter le résultat obtenu.