Polynôme caractéristique d'une matrice carrée, algorithme de Lagrange

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Q})$. Le polynôme caractéristique de M est $\chi_M(X) = \det(M - XI_n) \in \mathbb{Q}_n[X]$. On étudie dans ce T.P. un algorithme de calcul de $\chi_M(X)$ reposant sur le calcul d'un déterminant par la méthode du pivot de Gauss et sur la théorie de l'interpolation de Lagrange.

Les élèves travaillant en Maple ne doivent pas utiliser le paquetage `linalg`, ce serait tricher. Toutefois ils sont autorisés à importer les fonctions `rowdim` et `coldim` de ce paquetage (entrer `with(linalg,rowdim,coldim);` au début de la feuille de calcul) permettant d'obtenir simplement le nombre de lignes et de colonnes d'une matrice.

Les élèves travaillant en Caml devront utiliser la bibliothèque `num` qui implémente l'arithmétique exacte sur les nombres rationnels (entrer `#open "num";;` au début du programme). Les opérations usuelles sur les rationnels sont notées `+/`, `-/`, `*/` et `//`. Le symbole `=/` désigne le test d'égalité entre rationnels et la fonction `num_of_int` permet de convertir un entier ordinaire en rationnel de dénominateur 1.

1) Calcul d'un déterminant par opérations élémentaires

On peut calculer $\det(M)$ en transformant M en une matrice triangulaire supérieure à l'aide d'opérations sur les lignes selon l'algorithme qui suit.

Traitement de la colonne j

Supposons avoir obtenu $M' = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$ avec $A \in \mathcal{M}_{j-1}(\mathbb{Q})$ triangulaire supérieure de diagonale $(1, \ldots, 1)$ et $\lambda \in \mathbb{Q}$ tels que $\det(M) = \lambda \det(M') = \lambda \det(C)$ (on est dans ce cas initialement avec $j = 1$, $M' = M$ et $\lambda = 1$).

– Si $j = n$ alors $\det(M) = \lambda$.
– Sinon, si la première colonne de C est nulle (c'est-à-dire si $M'_{ij} = 0$ pour tout $i \geqslant j$) alors $\det(C) = 0$ et donc $\det(M) = 0$.
– Sinon, soit $M'_{ij} \neq 0$ avec $i \geqslant j$:
  si $i > j$, échanger les lignes i et j de M' et changer λ en $-\lambda$;
  diviser la ligne j de M' par M'_{jj} (maintenant non nul) et changer λ en $\lambda M'_{jj}$;
  pour tout $i > j$, retrancher M'_{ij} fois la ligne j de M' à la ligne i de M' ;
  passer alors à la colonne $j + 1$.

Programmer cet algorithme. On écrira une fonction `det` qui prend une matrice M comme argument et qui retourne son déterminant. Cette fonction devra procéder en premier lieu à une copie de la matrice M de façon à ne pas la modifier. On utilisera le code suivant :

en Maple :
```
copie := proc(m::matrix)
local n, p, i, j, t;
    n := rowdim(m);
    p := coldim(m);
    t := matrix(n, p);
    for i from 1 to n do for j from 1 to p do t[i, j] := m[i, j] od od;
    eval(t)
end
```

en Caml :
```
let copie(m) =
  let n = vect_length(m)
  and p = vect_length(m.(0))        in
  let t = make_matrix n p m.(0).(0) in
  for i=0 to n-1 do for j=0 to p-1 do t.(i).(j) <- m.(i).(j) done done;
  t
;;
```

2) Calcul du polynôme caractéristique

On peut théoriquement calculer $\chi_M(X)$ par la méthode précédente en remplaçant M par $M - XI_n$, mais ceci impose de travailler avec des matrices à coefficients dans le corps $\mathbb{Q}(X)$ et non dans $\mathbb{Q}$, ce qui est délicat. Une méthode plus efficace consiste à calculer $\chi_M(\lambda)$ dans $\mathbb{Q}$ pour $n+1$ valeurs rationnelles distinctes de λ et à en déduire les coefficients de $\chi_M(X)$ par interpolation de Lagrange.

a) Interpolation de Lagrange

Soit $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$ $2n$ rationnels tels que les x_i soient deux à deux distincts et P_n le polynôme de $\mathbb{Q}_{n-1}[X]$ défini par : pour tout i, $P_n(x_i) = y_i$. On note $Q_n(X) = (X - x_1)\dots(X - x_n)$ et on a les relations de récurrence :

$$\begin{cases} P_{n+1}(X) = P_n(X) + \dfrac{y_{n+1} - P_n(x_{n+1})}{Q_n(x_{n+1})} Q_n(X), \\ Q_{n+1}(X) = (X - x_{n+1})Q_n(X). \end{cases}$$

Écrire une fonction `Lagrange` qui prend en argument deux tableaux X, Y contenant respectivement les x_i et les y_i et qui retourne un tableau P contenant les coefficients du polynôme P_n (P est indexé par $[\![0, n-1]\!]$ et $P[i]$ est le coefficient de X^i dans $P_n(X)$). On programmera les calculs de $P_n(x_{n+1})$ et $Q_n(x_{n+1})$ par l'algorithme de Horner.

b) Polynôme caractéristique

Écrire une fonction `poca` prenant une matrice M en argument et retournant son polynôme caractéristique, sous forme de tableau de coefficients.