INF 421 — 07 Luc Maranget

Arbres binaires, ensembles

Luc.Maranget@inria.fr
http://www.enseignement.polytechnique.fr/profs/informatique/Luc.Maranget/421/

Ensembles

- Avec des listes,
  - ▷ Non-triées, triées.
- Avec des arbres,
  - ▷ Quelconques, équilibrés.
- Un cas particulier, *le tas*.

Réalisation des ensembles avec les listes

On peut représenter le *ensembles* par des listes.

Il suffit de maintenir la condition :

Les éléments d'un ensemble sont deux à deux distincts.

Il faut donc pouvoir déterminer l'égalité de deux éléments.

Dans la suite, nos éléments sont des **int**, mais cela pourrait facilement être des objets quelconques (par redéfinition de la méthode `equals` des `Object`).

La classe des listes (d'entiers)

Air connu...

```
class List {
  int val ;
  List next ;

  List (int val, List next) {
    this.val = val ; this.next = next ;
  }
}
```

Opérations élémentaires

- Test d'appartenance.

```
static boolean mem(int x, List p) {
  for ( ; p != null ; p = p.next) {
    if (x == p.val) return true ;
  }
  return false ;
}
```

- Ajout

```
static List add(int a, List p) {
  if (mem(a, p)) {
    return p ;
  } else {
    return new List (a, p) ;
  }
}
```


Opération ensembliste : union

- Récursif.

```
static List union(List p, List q) {
  if (p == null) {
    return q ;
  } else {
    return add(p.val, union(p.next, q)) ;
  }
}
```

- Itératif.

```
static List union(List p, List q) {
  List r = q ;
  for ( ; p != null ; p = p.next) {
    r = add(p.val, r) ;
  }
  return r ;
}
```


Bilan des coût

Quel est alors le coût asymptotique dans le cas le pire :

- Du test d'appartenance ? $O(n)$ (penser à l'échec, compter les appels de fonction).
- De l'ajout ? $O(n)$ (comme `mem`).
- De l'union (de deux ensembles de cardinaux n et m) ? $O(n \times (n+m))$ (n fois `add`).

Une idée

Normaliser les listes : représenter un ensemble par la liste triées (ordre croissant) de ses éléments.

Appartenance

On peut utiliser l'ancienne méthode `mem` où une méthode un peu améliorée.

```
static boolean mem(int x, List p) {
  if (p == null || x < p.val) {
    return false ;
  } else {
    return p.val == x || mem(x, p.next) ;
  }
}
```

Ajout et union

- Ajout ? Insertion dans une liste triée (cf. insertion sort).
- Union ? Fusion de deux listes triées (cf. merge sort).

Bilan des coûts

	`mem`	`add`	`union`
Liste	$O(n)$	$O(n)$	$O(n^2)$
Liste triée	$O(n)$	$O(n)$	$O(n)$

Remarquer L'implémentation « liste triée » favorise l'opération ensembliste, mais n'améliore pas les autres opérations.

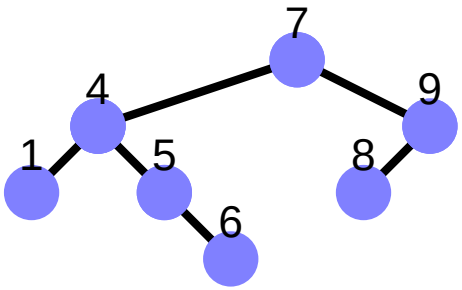
Représenter les ensembles avec les arbres

On définit les *arbres binaires de recherche* :

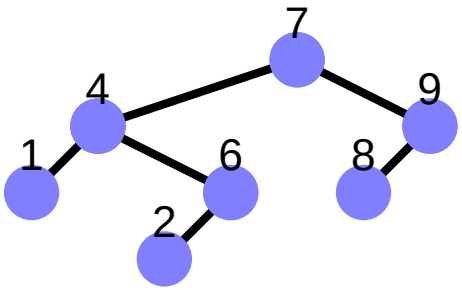
- L'arbre vide est un ABR, ses clefs sont $\emptyset$.
- Si T_0 et T_1 sont des ABR, de clefs respectives C_0 et C_1 et :
  - ▷ x majore (strictement) toutes les clefs de C_0 ;
  - ▷ x minore (strictement) toutes les clefs de C_1 ;

  alors (T_0, x, T_1) est un ABR et ses clefs sont $C_0 \cup \{x\} \cup C_1$.

Un exemple d'arbre binaire de recherche



Un contre-exemple d'arbre binaire de recherche



Classe `Tree` des arbres binaires de recherche

```
class Tree {
  int key ;
  Tree left, right ;

  Tree (Tree left, int key, Tree right) {
    this.left = left ; this.right = right ;
    this.key = key ;
  }

  Tree (int key) {
    this.key = key ; left = right = null ;
  }
}
```


Test d'appartenance dans un ABR

C'est simple si on pense récursivement.

```
static boolean mem(int x, Tree t) {
  if (t == null) {
    return false ;
  } else {
    if (x < t.key) {
      return mem(x, t.keft) ; // Chercher à gauche
    } else if (x > t.key) {
      return mem(x, t.right) ; // Chercher à droite
    } else { // x == t.key
      return true ; // Trouvé ici
    }
  }
}
```


Test d'appartenance dans un ABR II

Finalement assez simple à programmer itérativement, penser que l'on suit un chemin dans un arbre.

```
static boolean mem(int x, Tree t) {
  while (t != null) {
    if (x < t.key) {
      t = t.left ;
    } else if (x > t.key) {
      t = t.right ;
    } else { // x == t.key
      return true ;
    }
  }
  return false ;
}
```


Ajouter un élément : insertion dans un ABR

```
static Tree add(int x, Tree t) {
  if (t == null) {
    return new Tree(x) ;
  } else {
    if (x < t.key) {
      return new Tree (add(x, t.left), t.key, t.right) ;
// ajouter à gauche
    } else if (v > t.key) {
      return new Tree (t.left, t.key, add(x, t.right)) ;
// ajouter à droite
    } else { // v == t.key, déjà là
      return t ;
    }
  }
}
```

Programmation itérative possible, mais trop complexe.

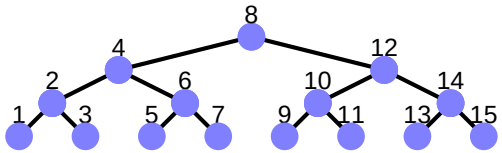
Coût des deux opérations élémentaires

Il est facile de voir que le coût de `mem` et `add`, est en $O(h)$ où h est la hauteur de l'ABR.

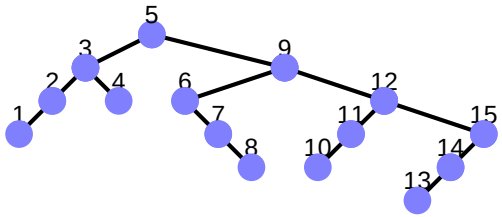
Mais on veut borner le coût fonction de n cardinal de l'ensemble...

Il faut donc exprimer la hauteur h en fonction du cardinal n.

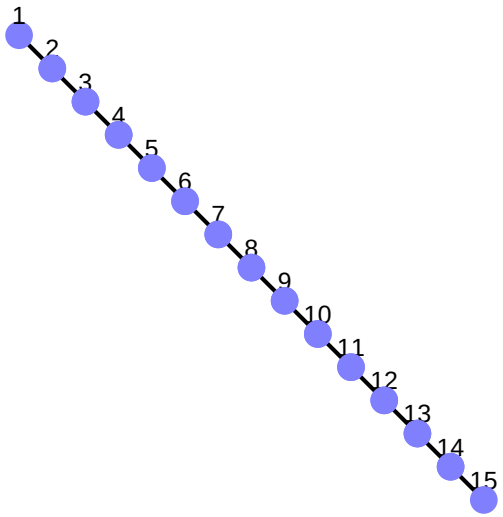
Un arbre (très) équilibré



Un arbre à peu près équilibré

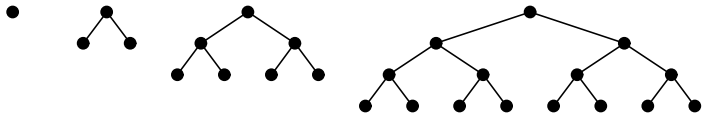


Un arbre (très) déséquilibré



Hauteur minimale d'un arbre binaire

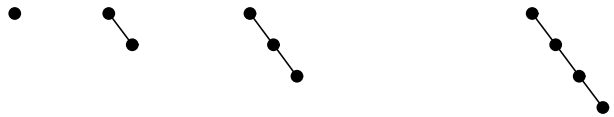
Ou nombre maximal de sommets pour une hauteur donnée : arbre binaire *complet*



$$n \leq 2^{h+1} - 1, \quad h \geq \log_2(n+1) - 1$$

Hauteur maximale d'un arbre binaire

Ou nombre minimal de sommets pour une hauteur donnée : arbre dégénéré en liste.



$h = n$

Complexité en moyenne

Sur un univers E qui regroupe des événements e de probabilité $P(e)$, soit une fonction $X(e)$.

L'espérance (moyenne) de X est définie par :

$$E(X) = \sum_{e \in E} \text{Prob}(e) \cdot X(e)$$

Par exemple :

- e est un entier $1 \leq k \leq 2n$,
- X est le nombre d'appels récursifs à `mem`, effectués lors du test d'appartenance de k à la liste (triée) des entiers *pairs* compris entre 2 et $2n$.

Appartenance dans les listes, coût en moyenne

- Cas du `mem` qui ne sait pas que la liste est triée.

$$X(2p) = p, \quad X(2p-1) = n$$

Et donc :

$$E(X) = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{2n} p + \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{2n} n = \frac{3n+1}{4}$$

- Cas du `mem` qui sait que la liste est triée.

$$X(2p) = p, \quad X(2p-1) = p$$

Et donc :

$$E(X) = 2 \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{2n} p = \frac{1}{2}(n+1)$$

Deux résultats en moyenne, sur les ABR

Pour n tendant vers $+\infty$...

- La hauteur moyenne des arbres à n sommets est de l'ordre de $\sqrt{n}$ (pas de bol).
- La hauteur moyenne des arbres produits par addition de 1, ... n, dans tous les ordres possibles est elle de l'ordre de $\log(n)$.

Le second résultat nous permet plus ou moins de considérer qu'un arbre pris au hasard est de hauteur $\log(n)$. Mais...

- Le coût dans le cas le pire reste une hauteur en n.
- Et ce cas très déséquilibré est malheureusement assez probable en pratique (addition de $1, 2, \ldots n$).

Les arbres AVL

Les arbres AVL (Adelson-Velinsky-Landis) sont des arbres binaires plus :

- Les hauteurs des sous-arbres gauche et droit diffèrent *au plus* de un

Une conséquence importante :

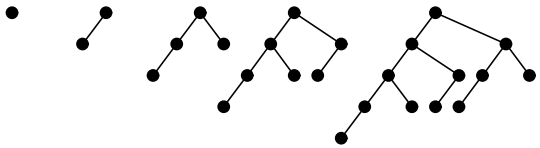
- La hauteur d'un arbre AVL est en $\log(n)$.

$$\log_2(1+n) \leq 1+h \leq \alpha \log_2(2+n)$$

(avec $\alpha \leq 1.44$)

Diversion : explication rapide des bornes

- La borne inférieure $\log_2(1+n) \leq 1+h$ est vraie de tous les arbres binaires (un arbre de hauteur h à au plus $2^{h+1}-1$ nœuds).
- La borne supérieure est plus intéressante. On considère l'arbre AVL F_h le plus petit possible pour une hauteur donnée.
  - Hauteur zéro : arbre vide.
  - Hauteur un : une feuille.
  - Hauteur $h+2$: $F_{h+2} = (F_{h+1}, x, F_h)$.



Arbre équilibré de hauteur maximale

Les équations définissant le nombre de sommets de l'arbre de taille minimale pour h donné, sont donc.

$$F(0) = 0, \quad F(1) = 1, \quad F(h+2) = 1 + F(h+1) + F(h)$$

Posons $G(h) = F(h) + 1$, il vient :

$$G(0) = 1, \quad G(1) = 2, \quad G(h+2) = G(h+1) + G(h)$$

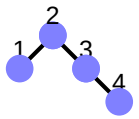
On trouve :

$$G(h) = \frac{5-\sqrt{5}}{2}\Phi^h + \frac{\sqrt{5}-3}{2}\Phi^{-h}, \quad \text{avec} \Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

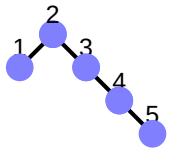
Au final la hauteur maximale d'un AVL est de l'ordre de $\log_\Phi(n)$, donc de l'ordre de $\log_2(n)$.

La vraie question des AVL : l'équilibre

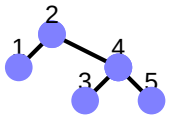
Soit un AVL,



On ajoute l'élément 5



On rétablit l'équilibre.



Déséquilibre (à droite).

Comment garantir l'équilibre ?

Supposons écrite une méthode `balance(AVL left, int key, AVL right)` qui renvoie un arbre équilibré.

Alors c'est facile, (comme pour les ABR normaux).

```
static AVL add(int x, AVL t) {
  if (t == null) {
    return new AVL(x) ;
  } else {
    if (x < t.key) {
      return balance(add(x, t.left), t.key, t.right) ;
    } else if (v > t.key) {
      return balance(t.left, t.key, add(x, t.right)) ;
    } else {
      return t ;
    }
  }
}
```


Classe des AVL

```
class AVL {
  int key ;
  private int h ; // Champ hauteur (pour éviter le recalcul)
  AVL left, right ;

  static int hauteur(AVL t) {
    if (t == null) { return 0 ; }
    else { return t.h ; }
  }

  AVL (AVL left, int key, AVL right) {
    this.left = left ; this.right = right ; this.key = key ;
    this.h = Math.max(hauteur(left), hauteur(right)) + 1 ;
  }
  AVL (int key) {this.key = key ; left = right = null ; h = 1 ;}
}
```

Il reste à écrire `balance`.

Écrivons `balance`

`balance` prend deux arbres `left` et `right` en argument, avec (par construction)

$$-2 \leq \texttt{hauteur(left)} - \texttt{hauteur(right)} \leq 2$$

On suppose un déséquilibre, c'est à dire par ex.

$$\texttt{hauteur(left)} = \texttt{hauteur(right)} + 2$$

C'est à dire :

- On a ajouté un élément dans le sous arbre de gauche,
- sa hauteur a augmenté (de un),
- alors qu'avant ajout le sous-arbre gauche était déjà plus haut (de un) que le sous-arbre droit

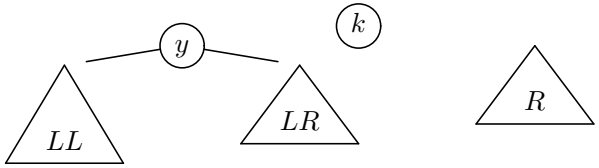
Analysons un peu encore

Notons L (arbre de gauche), k (clé) et R les arguments de `balance`.

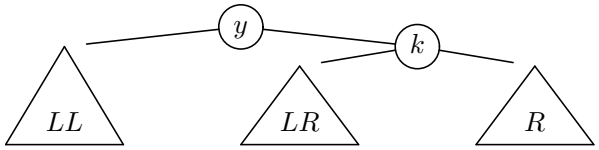
- On note que (L, k, R) est un ABR, mais (possiblement) déséquilibré.
- On suppose le déséquilibre : $h(L) = h(R) + 2$ et donc $L = (LL, y, LR)$. Notons $H(R) = \delta$. Deux sous-cas :
  - Le sous-arbre, LL impose sa hauteur à L, c'est à dire $h(LL) = \delta + 1$ (et $h(LR) = \delta$ ou $h(LR) = \delta + 1$).
  - Ou bien, LL n'impose pas sa hauteur à L, c'est à dire $h(LL) = \delta$ et $h(LR) = \delta + 1$.

Premier cas

Supposons donc $h(LL) = \delta + 1$ (et$h(LR) = \delta$ ou $h(LR) = \delta + 1$).



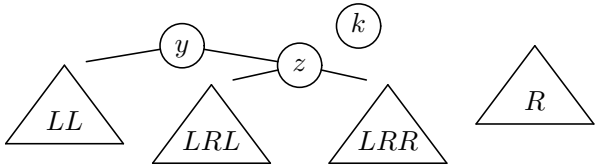
Alors, l'arbre suivant est équilibré :



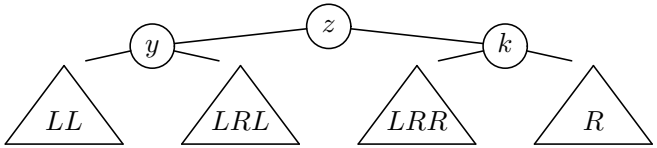
De hauteur $\delta + 2$ ou $\delta + 3$.

Second cas

Ce cas ($\delta = h(LL) < h(LR) = \delta + 1$) entraîne LR non-vide.



Alors, l'arbre suivant est équilibré



De hauteur $\delta + 2$.

Une remarque

Tout d'abord, un résultat, si $h(L) = h(R) + 2$, nous savons produire un AVL équivalent à l'ABR déséquibré (L, x, R), et ceci en temps constant.

Dans le cas de l'ajout, la hauteur finale de l'AVL est toujours $\delta + 2$, car le cas $h(LL) = h(LR) = \delta + 2$ ne peut pas se produire (sinon, l'arbre avant ajout serait déséquibré).

Cette hauteur est *égale* à celle de l'arbre avant ajout

On en déduit que l'équilibrage se produit au plus une fois lors d'un ajout.

Dans un souci de complétude

```
static AVL balance(AVL left, int val, AVL right) {
  int hl = hauteur(left), hr = hauteur(right);

  if (hl > hr + 1) { // => left != null
    if (hauteur(left.left) >= hauteur(left.right))
      return
        new AVL(left.left,left.key,new AVL (left.right,val,right));
    else // => left.right != null
      return
        new AVL(new AVL (left.left,left.key,left.right.left),
                      left.right.key,
                      new AVL (left.right.right,val,right));
  } else if (hr > hl + 1) { // Même chose en symétrique
    ...
  } else
    return new AVL (left,val,right);
}
```

Conclusion temporaire

Le minimum à savoir.

- Les ABR *equilibrés* sont une implémentation très générale et efficace (ajout en $O(\log n)$) des ensembles.
- Pour pouvoir l'employer, il fait un ordre total sur les éléments (pas nécessaire pour les listes non-triées).
- Cette implémentation est persistante, on peut écrire

```
AVL xs = ... ;
AVL ys = AVL.add(2, xs) ;
```

  Et : l'ensemble `xs` ne change pas.

Dans le même ordre d'idée

Les arbres equilibrés permettent une implémentation efficace des associations (amphi 04), cette fois *persistantes*.

- Il suffit d'ajouter un champ `val` dans la définition des cellules d'arbre.

```
class TreeEnv { // Association des chaînes aux entiers
  String key ;
  int val ;
  TreeEnv left, right ;
  ...
}
```

- On retrouver la valeur associée à une clé par un genre de `mem`.

```
static int get(TreeEnv env, String key, int val) {
  ...
}
```


- On ajoute une association par un genre de `add`.

```
static TreeEnv put(TreeEnv env, String key, int val) {
  ...
}
```

  La méthode `put` renvoie `env` augmenté de la nouvelle association, `env` n'est pas modifé.

- Et ici il faut remarquer la différence avec la signature par exemple des tables de hachage.

  void `put(`K `key, `V `value)`

Les ABR de la bibliothèque

- Java fournit les ensembles d'objets réalisés par des arbres équilibrés : la classe `TreeSet`[a] (package `java.util`). Il s'agit encore une fois, d'une classe générique `TreeSet<`E`>` est un ensemble de E.
- Les objets-éléments sont ordonnés, c'est-à-dire qu'ils doivent implémenter l'interface `Comparable`[b].

```
interface Comparable<E> {
 int comparesTo(E o) ;
}
```

  C'est par exemple le cas des chaînes `String`.

De façon surprenante, les `TreeSet` de Java, sont des ensembles impératifs (non-persistants), dommage.

[a] `http://java.sun.com/j2se/1.5.0/docs/api/java/util/TreeSet.html`
[b] `http://java.sun.com/j2se/1.5.0/docs/api/java/lang/Comparable.html`

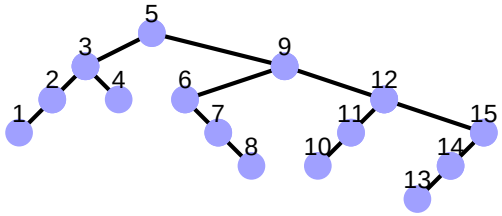
Complément : enlever un élément

Prenons le cas des ABR, on trouve les premiers cas par induction.

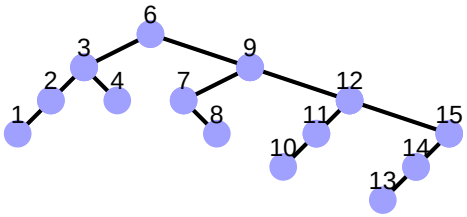
```
static Tree remove(Tree t, int v) {
  if (t == null) {
    return null ;
  } else if (v < t.key) {
    return new Tree (remove(t.left, v), t.key, t.right) ;
  } else if (v > t.key) {
    return new Tree (t.left, t.key, remove(t.right, v)) ;
  } else if (t.right == null) {
    return t.left ;
  } else {// Ici v == t.val, t.right != null
    ...
```

Le dernier cas n'est pas immédiat : il faut mélanger `t.left` et `t.right` en un seul ABR.

Exemple : enlever la racine



L'idée, remplacer la racine par le minimun du sous-arbre droit.



Trouver/enlever le minimum

- Trouver : à gauche toute !

```
static int getMin(Tree t) {
  while (t.left != null) {
    t = t.left ;
  }
  return t.key ;
}
```

- Enlever, à gauche encore !

```
static Tree removeMin(Tree t) {
  if (t.left == null) {
    return t.right ;
  } else {
    return new Tree (removeMin(t.left), t.key, t.right) ;
  }
}
```


Remplacer la racine

Voici le code manquant de `remove`.

```
static Tree remove(Tree t, int v) {
  ...
  } else { // Ici v == t.val, t.right != null
    int min = getMin(t.right) ;
    return new Tree(t.left, min, removeMin(t.right)) ;
  }
}
```

Et les AVL ? Remplacer, dans `remove` et `removeMin`, tous les appels du constructeur **new** `Tree(`ℓ`,` v`,` r`)` par des appels de méthode `balance(`ℓ`,` v`,` r`)`.

Correction ? Le déséquilibre entre ℓ et r est limité à 2 au plus.

Opération ensemblistes

Réaliser par exemple l'union de deux deux ensembres représentés par les ABR equilibrés T_1 et T_2.

Une première méthode simple :

> Parcourir l'arbre T_1 pour ajouter ses éléments à T_2 (avec la méthode `add`).

Coût (T_1 et T_2 possédant n éléments) :$O(n \log n)$ (n fois `add` dans un arbre de taille au plus $2n$)

Une autre méthode (pour les ABR)

Union de T_1 et T_2

- Si T_1 est vide, renvoyer T_2.
- Si T_2 est vide, renvoyer T_1.
- Sinon $T_1 = (L_1, x, R_1)$,
  - ▷ Calculer les ABR L_2 et R_2, définis comme formés des éléments de T_2 respectivement $<$ et $>$ à x.
  - ▷ Renvoyer l'ABR $(L_1 \cup L_2, x, R_1 \cup R_2)$

Remarquer

- Si T_1 et T_2 sont le même ensemble le coût est en $O(n)$.
- Généralisable aux AVL, avec des résultats satisfaisants en pratique.

Programmation de `union`

Suit directement l'algorithme.

```
static Tree union(Tree t1, Tree t2) {
  if (t1 == null) return t2 ;
  else if (t2 == null) return t1 ;
  else {
    Tree l1 = t1.left, r1 = t1.right ;
    int x = t1.key ;
    Tree l2 = splitLt(x, t2), r2 = splitGt(x, t2) ;
    return new Tree (union(l1, l2), x, union(r1, r2)) ;
  }
}
```


Programmation de `splitLt`

Renvoie l'ensemble des éléments de `t` qui sont $<$ à `x`.

```
static Tree splitLt(int x, Tree t) {
  if (t == null) return null ;
  else {
    if (t.key < x) { // Ici t.left < x
      return new Tree(t.left, t.key, splitLt(x, t.right))
    } else if (t.key > x) {
      // Cas symétrique
    } else { // t.key == x
      return t.left ;
    }
  }
}
```

Coût, (approche heuristique)

Supposons les arbres équilibrés.

Le coût d'un appel à `union` est dominé par celui des appels à `splitLt` et `splitGt`, qui sont proportionels à la hauteur de `t2`.

$$U(n) \sim \log(n) + 2U(n/2)$$

En posant $n = 2^p$,

$$U(2^p) \sim p + 2U(2^{p-1}).$$

Soit à peu près,

$$U(2^p) \sim p + 2(p-1) + 4(p-2) + \cdots 2^p \sim 2^{p+2}.$$

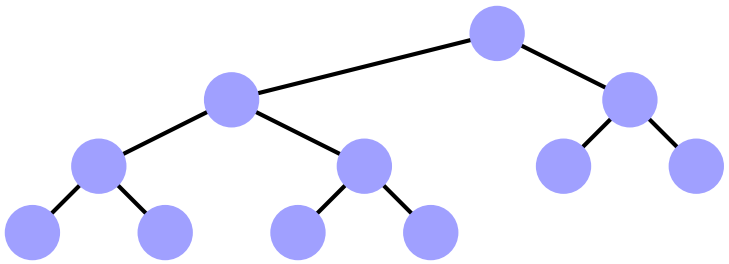
Un cas particulier

- Un ensemble dynamique : méthode `add`.
- Avec une opération efficace de recherche/enlever le maximum `getMax`, `removeMax` (ou le minimum, au choix à fixer à l'avance).

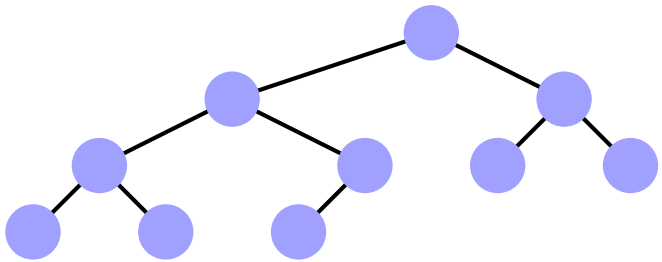
On peut utiliser un arbre AVL, mais il existe une solution plus simple.

Les arbres (binaires) quasi-complets

- Tous les étages sont remplis,
- Sauf, éventuellement, le dernier qui est « tassé » vers la gauche.

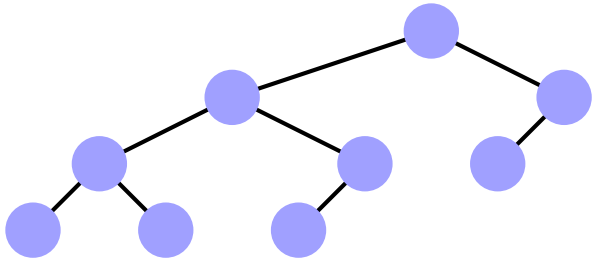


Exemples et contre-exemples

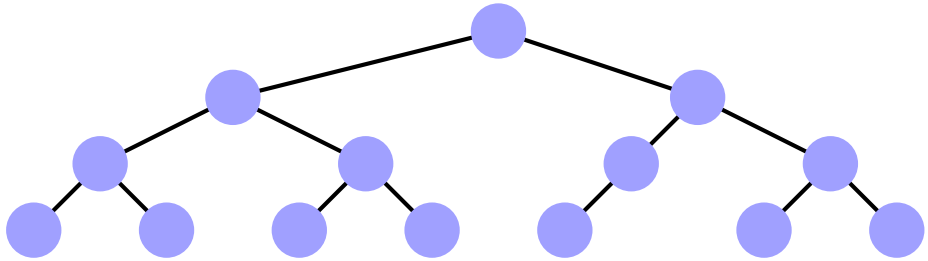


Oui

Noter : un des sommets de l'avant-dernier étage n'a qu'un fils.



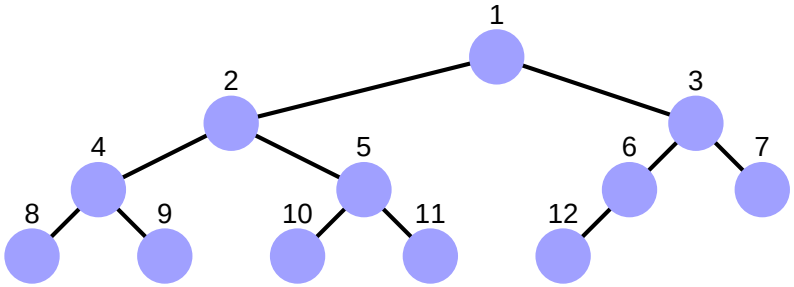
Non, le troisième étage est incomplet.



Non, le dernier étage n'est pas « tassé ».

Arbres quasi-complets et tableaux

- Numérotons les sommets selon un ordre « en largeur d'abord ».



- Et rangeons les sommets dans un tableau.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	...
Étage :	1	2		3				4					

Arbres quasi-complets et tableaux

En fait les arbres quasi-complets sont exactement les arbres représentables ainsi dans un tableau :

- On choisit de ranger la racine de l'arbre dans la case d'indice 1.
- Indice des fils du sommet d'indice i ?
  - Fils gauche : $2 \times i$.
  - Fils droit : $2 \times i + 1$.
- Parent du sommet d'indice i ($i > 1$) ? $\lfloor i/2 \rfloor$.
- La case d'indice i est un sommet de l'arbre à n sommets ? $1 \leq i \leq n$.

Bout de preuve

On numérote les sommets d'un arbre quasi-complet selon un parcours en largeur d'abord :

- Le d-ième étage comprend 2^{d-1} sommets (sauf le dernier étage, c'est l'hypothèse « quasi-complet »).
- Le k-ième sommet du d-ième étage est donc d'indice :

$$2^0 + 2^1 + \cdots + 2^{d-2} + k = 2^{d-1} + (k-1)$$

Reste à montrer qu'il y a $i-1$ sommets entre un sommet d'indice i et son fils gauche (si il existe). Et en effet, il y a :

- d'abord $2^{d-1} - k$ sommets de l'étage d (les « successeurs »),
- puis $2 \times (k-1)$ sommets de l'étage $d+1$ (les fils des prédécesseurs de l'étage d).

Soit en tout $i-1$ sommets.

Bout de philosophie

- Quelle est la hauteur d'un arbre quasi-complet à n sommets ?

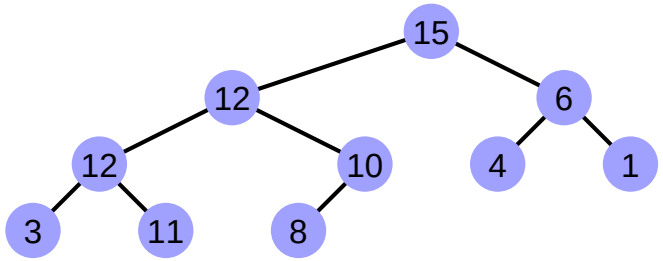
$$\lfloor \log_2(n) \rfloor$$

- Avantage de la représentation en tableau.
  - Efficacité, économie de mémoire (avantage faible).
  - Simplicité (notamment pour trouver le père d'un sommet).
  - Avantage pédagogique : un arbre n'est pas nécessairement réalisé en machine avec des objets, des flèches, etc. (ici la « flèche » est remplacé par un « indice »).

Le heap (tas)

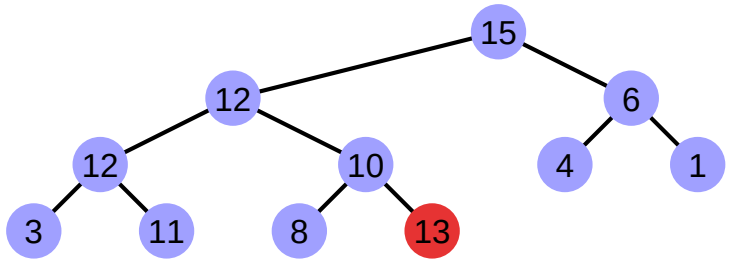
Un tas est un arbre quasi-complet et :

- Les sommets portent des clés ordonnées.
- La clé de tout sommet est supérieure ou égale à celles de ses fils.



C'est un tas-max, il y aussi évidemment des tas-min.

Contre-exemple

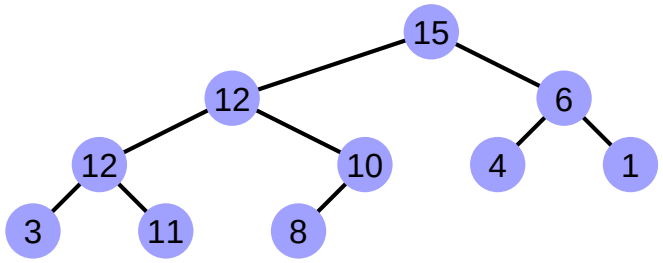


La propriété de heap est invalidée par le sommet de clé 13.

Le heap (tas)

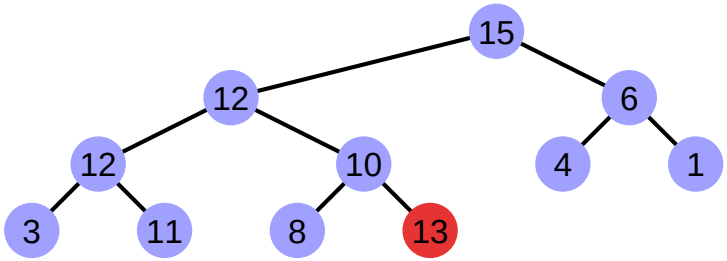
Un tas est un arbre quasi-complet et :

- Les sommets portent des clés ordonnées.
- La clé de tout sommet est supérieure ou égale à celles de ses fils.



C'est un tas-max, il y aussi évidemment des tas-min.

Contre-exemple



La propriété de heap est invalidée par le sommet de clé 13.

Classe `Heap`

Les tas (d'entiers) : encapsulage du tableau.

```
class Heap {
  private int [] t ; // Tableau des sommets
  private int n ;     // Nombre de sommets

  Heap(int sz) {
    t = new int [sz+1] ;
    n = 0 ;
  }
  ...
}
```


Ajouter un élément dans un heap.

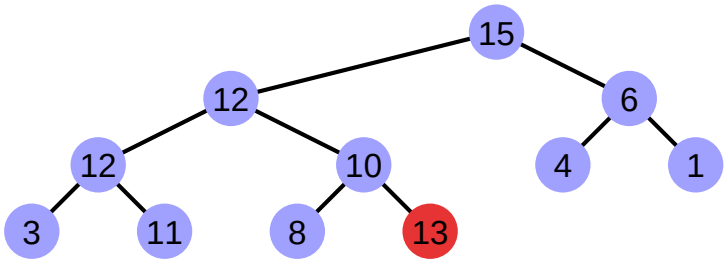
- Où ajouter facilement un élément dans un heap représenté par un tableau ? À la fin !

```
void add(int x) {
   n++ ;
   t[n] = x ;
   ...
}
```

- Conséquence : la propriété de heap peut être invalidée.

Invalidation de la propriété de heap

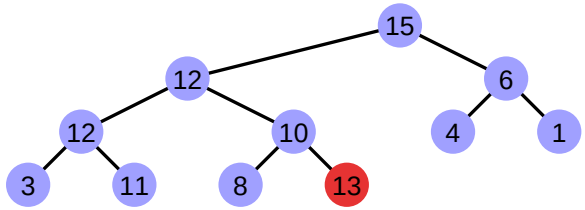
La position d'indice $n+1$ dans le tableau est la feuille « suivante ».

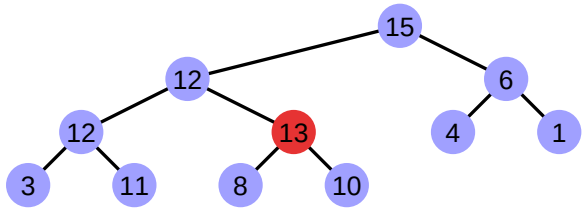


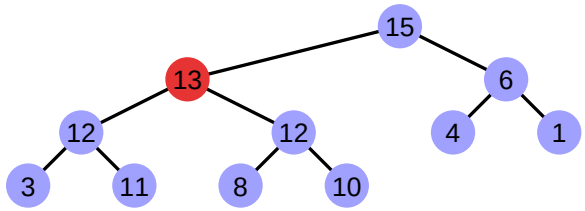
(Ajout de 13.)

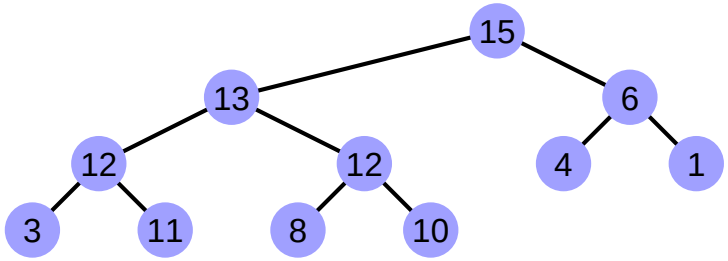
Restaurer la propriété de heap

Faire « remonter » le sommet invalidant.





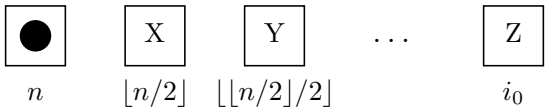


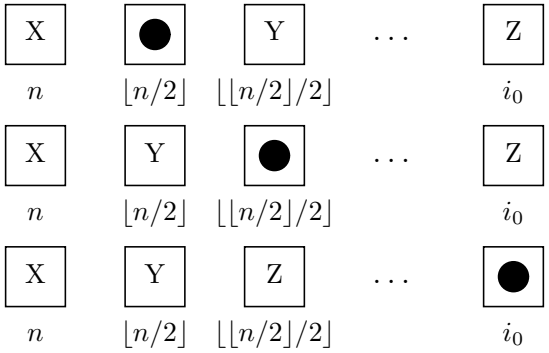


Faire « remonter » un sommet

```
void add(int x) {
  n++ ;
  int i = n ;
  // Tant que i dans l'arbre et heap invalidé,
  while (i > 1 && t[i/2] < x) { // NB: division euclidienne
    t[i] = t[i/2] ; // Libérer la case i/2
    i = i/2 ;
  }
  t[i] = x ;
}
```

Noter Plutôt que d'échanger les cases, on fait remonter un trou.





Extraire le maximum

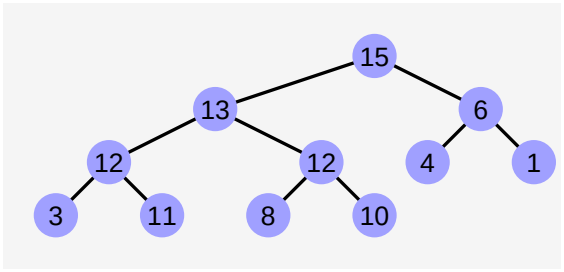
- Le maximum de toutes les clés se trouve… à la racine.
- Où enlever facilement un élément dans un heap représenté par un tableau ? À la fin !

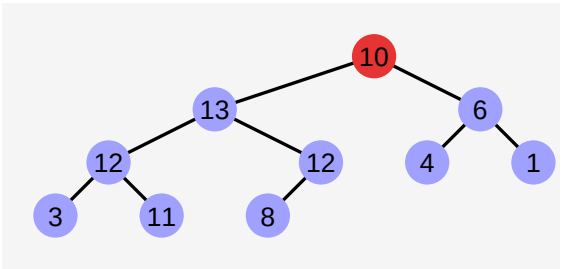
Donc,

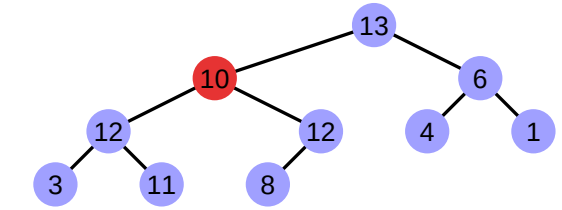
- Remplacer la racine par le dernier élément (celui d'indice n dans le tableau).
- Restaurer la propriété de heap, (cette fois ci en descendant).

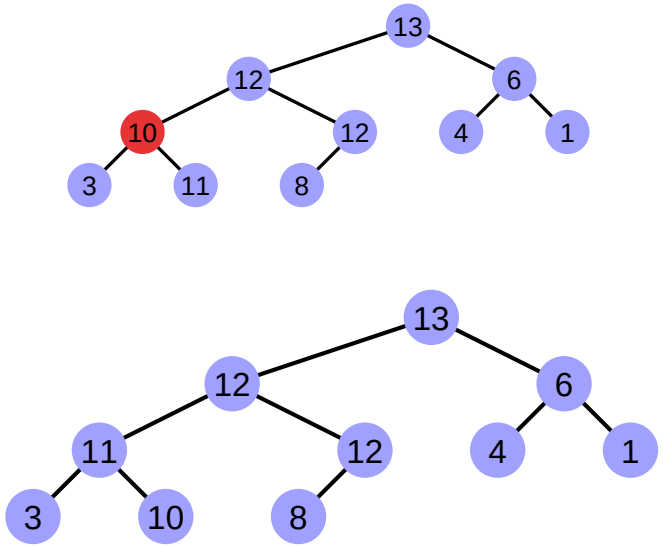
Restaurer le heap II

Faire « descendre » le sommet invalidant.









Le tas-outil

Les tas sont un outil efficace pour extraire des maxima (minima), à la volée.

- Ajouter un élément à n : $\log(n)$.
- Extraire le maximum parmi n : $\log(n)$.
- Efficacité brute raisonnable (quelques opérations sur entiers et tableaux).

Il sont souvent une brique d'algorithmes plus complexes (parcours de graphes, recherche de solutions optimales diverses).

Mais attention, les tas ne sont pas une bonne implémentation générale des ensembles (ou des multi-ensembles).

Exemple de tas-outil

Par exemple : on trie facilement n éléments avec un tas :

- Ajouter les éléments : $n \log(n)$.
- Extraire les maxima : $n \log(n)$.

Soit encore un tri en $n \log(n)$.

Performance de *heapsort*

Temps d'exécution de *heapsort* H et du tri de la bibliothèque S (`java.util.Arrays.sort`).