# Les dominos de Wang

(informatique théorique)

Jean-Jacques Lévy

INRIA Rocquencourt
Centre commun INRIA - Microsoft Research

19 avril 2008

d'après *The spirit of computing* (David Harel)

[g1] [g2]

# Première Partie

# Dominos de Wang (1/3)

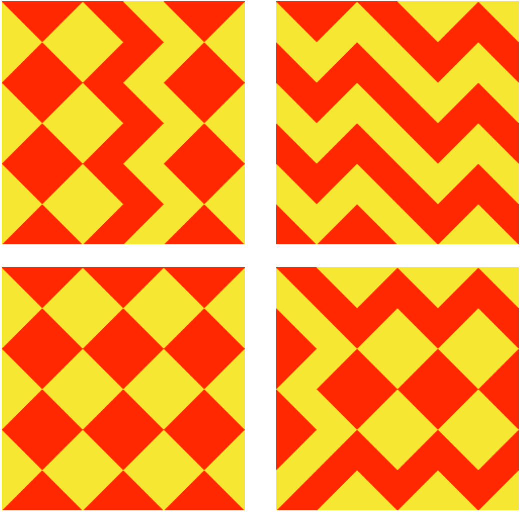
Un ensemble de $p = 4$ motifs

(carreaux à bords colorés)

Remplir un carré de coté $n = 6$

Deux motifs adjacents ssi leurs cotés communs de même couleur.
Rotations et symétries sont interdites.

# Dominos de Wang (2/3)



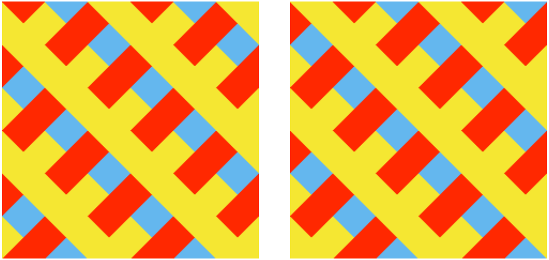
4096

solutions

# Dominos de Wang (3/3)

$p = 3$ motifs

longueur du coté $n = 6$



3 solutions

# Problème du carreleur

- Donnés : $p$ motifs et un carré de coté $n$.
- But : trouver un carrelage licite du carré avec les $p$ motifs.

[p1i]

[p2i]

# Énumérer tous les carrelages

- Énumérer tous les carrelages
- Ne retenir que les carrelages licites
- Nombre d'opérations : $p^{n^2}$
- Si $n = 6,\ p = 3$, cela fait $150094635296999121 \simeq 10^{17}$ opérations.
- Soit 57 jours en faisant $500 \times 10^6$ opérations par seconde.

[p1n]

[p2n]

# Détecter plus tôt les carrelages impossibles

- Éliminer les carrelages impossibles au fur et à mesure de leur construction,
- *Branch and bound* en anglais.
- Méthode qui marche bien en pratique,
- mais, dans le pire cas, autant d'opérations qu'avec la méthode précédente.

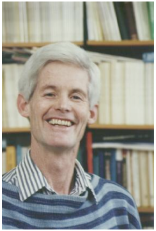
[p1] [p2] [p1f] [p2f] [p1s] [p2s]

# Faire appel à Dieu

- Un oracle nous indique à chaque étape un motif à prendre,
- et, à la fin, on teste si le carrelage est licite.
- Méthode très rapide (« linéaire » et donc polynomial),
- mais on peut ne pas croire en Dieu, et/ou Dieu peut se tromper.

# NP complétude

- En fait, sans appel à Dieu, personne ne sait faire mieux.
- Ce problème est représentatif d'une grande classe de problèmes, dits *NP* complets. Si on sait faire mieux pour le problème du carreleur, on sait le faire pour toute la classe *NP*.



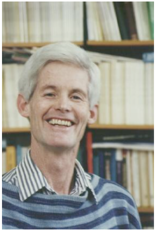
[Cook, 1973]

Conjecture : $P \overset{?}{\neq} NP$

- Un des 10 problèmes les plus importants des mathématiques. (1000000$ donnés par l'institut Clay

# NP complétude

- En fait, sans appel à Dieu, personne ne sait faire mieux.
- Ce problème est représentatif d'une grande classe de problèmes, dits *NP* complets. Si on sait faire mieux pour le problème du carreleur, on sait le faire pour toute la classe *NP*.



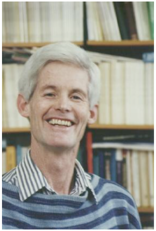
[Cook, 1973]

Conjecture : $P \stackrel{?}{\neq} NP$

- Un des 10 problèmes les plus importants des mathématiques. (1000000$ donnés par l'institut Clay

# NP complétude

- En fait, sans appel à Dieu, personne ne sait faire mieux.
- Ce problème est représentatif d'une grande classe de problèmes, dits *NP* complets. Si on sait faire mieux pour le problème du carreleur, on sait le faire pour toute la classe *NP*.



[Cook, 1973]

Conjecture : $P \overset{?}{\neq} NP$

- Un des 10 problèmes les plus importants des mathématiques. (1000000$ donnés par l'institut Clay

# Deuxième Partie

# Carrelage du plan

Le plan est infini

- Donnés : $p$ motifs
- But : carreler tout le plan

équivalent à

- Donnés : $p$ motifs
- But : carreler les carrés de coté $n$ pour tout $n \geq 0$

(Si on sait carreler toutes les cuisines du monde, on sait carreler le monde)

# Carrelages périodiques

- Wang (1973) : tout carrelage du plan est périodique.
- Périodicité $\Rightarrow$ réponse facile au carrelage du plan.
- On peut donc acheter un grand stock de motifs en sachant à l'avance qu'on saura carreler toutes les cuisines du monde.

  $\vdots$

- Berger a trouvé un contrexemple, car on peut faire de l'arithmétique avec les dominos de Wang.

# Les ordinateurs calculent en binaire

- Une addition

$$\begin{array}{r} 2099 \\ +\,1 \\ \hline 2100 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1011 \\ +\,1 \\ \hline 1100 \end{array}$$

décimal binaire

- qu'on peut simuler avec les dominos de Wang

# Calculs binaires avec des dominos de Wang

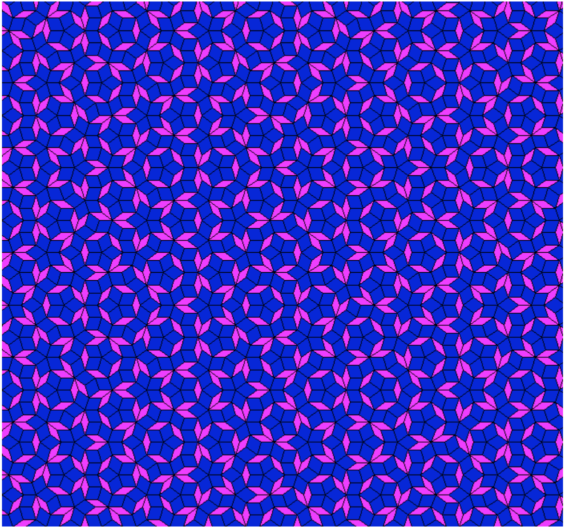
| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| q0 | 1 | 0 | 1 | 1 | B |
| 0 | q1 | 0 | 1 | 1 | B |
| 0 | 1 | q0 | 1 | 1 | B |
| 0 | 1 | 0 | q1 | 1 | B |
| 0 | 1 | 0 | 1 | q1 | B |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | qB |
| 0 | 1 | 0 | 1 | r1 | B |
| 0 | 1 | 0 | r1 | 0 | B |
| 0 | 1 | r0 | 0 | 0 | B |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | B |

# Calculs binaires avec des dominos de Wang

# Le carrelage du plan est indécidable

- Indécidabilité du problème de l'arrêt
  $\Rightarrow$
  indécidabilité du problème du carrelage du plan
- Conclusion : il existe des carrelages non périodiques du plan.
- en 1975, les carrelages (ou pavages) non périodiques ont fleuri.

# Pavage non-périodique de Penrose



# Théorie de la calculabilité est une vieille théorie

Gödel

Church

Turing

Post


Turing (Bletchley Park)

Kleene

von Neumann

# Conclusion

# Conclusion

En informatique, il existe des

- problèmes indécidables
  (carrelage du plan)
- problèmes décidables de complexité élevée
  (carrelage d'un carré)
- problèmes plus faciles
  (test si un carrelage est licite)

## En pratique

- les problèmes faciles prennent typiquement $n$, ou $n^2$, ou $n^3$ opérations,
- et suffisent à construire les cathédrales informatiques des années 2000.