Initiation à la Théorie des Catégories

Gérard Huet

INRIA

Notes de cours du DEA "Fonctionalité, Structures de Calcul et Programmation" donné à l'Université Paris VII en 1983-84 et 1984-85.

© G. Huet 1985

20 Décembre 1987

I . Catégories, foncteurs, transformations naturelles

1. Définition d'une catégorie

Une catégorie **C** se compose d'objets et de flèches. On écrit A : **C** pour dire que A est un objet de **C**, et f : **C**(A,B) pour dire que f est une flèche de **C** reliant l'objet A à l'objet B. En général la catégorie **C** dans laquelle on travaille est sous-entendue, et on écrit plus simplement f : A → B.

Jusqu'ici, une catégorie est un graphe orienté, dont les nœuds sont les objets et les arcs sont les flèches. Mais les catégories possèdent en plus la structure minimale donnée par l'associativité de la composition des flèches. Les flèches doivent donc être vues comme les chemins du graphe, quotientés par l'égalité des flèches.

On donnera le plus souvent une interprétation fonctionnelle aux flèches considérées comme des opérateurs sur les objets. Ainsi on dira que A (resp. B) est le domaine (resp. codomaine) de la flèche f : A → B. Souvent les objets auront une structure commune, et les flèches seront des applications préservant cette structure. Ceci explique la terminologie usuelle de morphisme (au lieu de flèche), par analogie avec les homomorphismes de l'Algèbre Universelle.

Donnons maintenant formellement les postulats catégoriques. Pour tout objet A il existe une flèche Id_A : A → A (l'identité de A), et pour toutes flèches f : A → B et g : B → C il existe une flèche f;g : A → C (la composition de f et g), vérifiant les axiomes :

Idl : Id;f = f
Idr : f;Id = f
Ass : (f;g);h = f;(g;h)

Dans les équations ci-dessus nous avons omis les types, qui sont considérés implicites. Notre point de vue est que Id est une constante polymorphe, dont le type A → A contient une variable libre A. De même la composition est une opération binaire paramétrique en 3 objets A, B et C. Une équation telle que **Idl** dénote toutes les équations entre flèches qui respectent les types. On peut montrer que toute expression typable possède un type principal, qui peut être calculé par l'algorithme d'unification.

On peut donner une interprétation logique à une catégorie. Les objets sont interprétés comme des propositions, et la flèche "→" est interprétée comme la conséquence logique. Une flèche f : A → B est interprétée comme une preuve qu'on peut déduire la conclusion B de l'hypothèse A. Les opérateurs Id et ";" spécifient que la déduction induit un préordre sur les propositions. Les axiomes ci-dessus postulent une congruence sur les preuves, préservant les propositions qu'elles prouvent. Cette congruence peut être réalisée par une normalisation, si on utilise ces axiomes comme des règles de simplification orientées de la gauche vers la droite. La terminaison des simplifications permet de définir la forme canonique d'une preuve. Cette interprétation intuitioniste est conforme à l'isomorphisme de Curry-Howard entre types et propositions. Les (parties gauches) des règles de simplification sont traditionnellement appelées coupures en théorie de la démonstration.

2. Exemples de (petites) catégories

2.1. Catégories discrètes

Tout ensemble E détermine une catégorie **Discr**(E), d'objets les éléments de E, et de seules flèches les identités correspondantes. Réciproquement, une catégorie est dite discrète lorsque ses seules flèches sont des identités. Il y a donc isomorphisme entre les ensembles et les catégories discrètes.

2.2. Monoïdes

Tout monoïde **M**=<E,**1**,*> détermine une catégorie **Mon**(**M**) possédant E pour objet unique et E pour ensemble des flèches f : E → E. On prend **1** pour Id_E et on définit f;g comme f*g.

Réciproquement, dans toute catégorie, à tout objet A correspond le monoïde des A-endomorphismes **Mon**(A)=<A→A, Id_A, ; >. Il y a donc isomorphisme entre les monoïdes et les catégories à objet unique.

2.3. Préordres

Tout préordre **P**=<E,≤> détermine une catégorie **Pré(P)** dont les objets sont les éléments de E, et possédant une flèche de A vers B ssi A≤B. Réciproquement, les préordres sont les catégories ayant une flèche au plus entre deux objets.

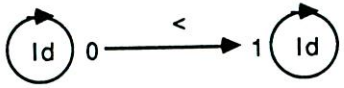
La dualité de l'interprétation logique d'une catégorie vue comme espace des preuves d'un préordre nous fournit l'interprétation d'un préordre comme quotient d'une catégorie par un principe d'abstraction, stipulant que les preuves ne sont pas pertinentes, et que seule leur existence nous importe. On retrouve ici le point de vue Booléen de la Logique Classique.

2.4. Quelques catégories remarquables

0 : la catégorie <u>initiale</u> **Discr**(Ø), sans objets.

1 : la catégorie <u>terminale</u> **Discr**({Ø}), qui possède un objet unique Ø, et une flèche unique $Id_{Ø}$.

2 : la catégorie **Pré(B)** avec **B** l'algèbre Booléenne à deux éléments {0,1} reliés par 0≤1 :



2

Ω : la catégorie **Pré(N)** avec **N** l'ensemble des entiers naturels {0,1, ...} muni de l'ordre standard ≤.

Si on définit les entiers naturels comme des ensembles cardinaux, par 0=Ø et n+1={0,1,...,n}, l'ensemble des cardinaux finis Ω={0,1, ...} permet de définir d'autres catégories, telle que :

Δ : la catégorie <u>simpliciale</u>, avec Ω comme ensemble d'objets et dont les flèches de m vers n sont toutes les fonctions croissantes de m vers n. Ici

l'ordre sur les entiers coincide avec l'appartenance et avec l'inclusion.

2.5. Catégories matricielles

Pour tout anneau Abélien **A**, la catégorie **Matr(A)** a pour objets les entiers naturels, et pour flèches de m vers n les **A**-matrices de dimension (m,n), avec pour composition le produit matriciel.

2.6. Catégories de fonctions

Si **U** est un ensemble d'ensembles, il détermine la catégorie **Ens(U)** qui a pour ensemble d'objets **U** et pour flèches f : A → B les fonctions de domaine A et de codomaine B. La composition est ici la composition usuelle (à l'ordre de ses arguments près : f;g = g o f).

Il convient de souligner que le typage des flèches est essentiel, et permet de définir une théorie de la fonctionnalité plus abstraite que celle basée sur les fonctions au sens ensembliste. Par exemple, si A est une partie stricte de B, Id_A est une flèche distincte de la flèche de A → B obtenue pour l'inclusion canonique, elle même distincte de Id_B.

3. Grandes catégories

3.1 Problèmes de fondement

On aimerait abstraire l'ensemble **U** considéré dans la dernière section, en se plaçant dans un univers **U** contenant tous les ensembles nécessaires au développement d'une théorie mathématique donnée. Il se pose ici un problème de fondement. On ne peut pas parler de l'ensemble de tous les ensembles, car cette notion mène aux paradoxes classiques. On ne peut pas postuler non plus un axiome de compréhension général, garantissant l'existence de l'ensemble caractéristique d'un prédicat arbitraire P (par exemple pour P(x) défini par "x n'appartient pas à x"). Il est usuel de restreindre ce principe aux x qui appartiennent à un ensemble donné E. Il est alors pratique de postuler l'existence d'un univers **U**, contenant Ω, et fermé par singleton, appartenance, paire, produit, passage aux parties,

union générale et image de fonction. On appelle alors **U**-ensemble, ou simplement petit ensemble en laissant **U** implicite, un élément de **U**.

3.2. La catégorie des petits ensembles

Dans tout ce qui suit, on suppose que **U** est un univers donné. On définit la catégorie des petits ensembles comme **Set** = **Ens(U)**. Ses objets sont les ensembles, et ses flèches les fonctions.

3.3. Les catégories algébriques

On considère dans cette section des variétés, constituées d'algèbres dont les ensembles support sont des petits ensembles. On peut donc parler de l'ensemble des petits groupes, par exemple. Les flèches entre les algèbres de la variété sont prises comme étant des fonctions respectant la structure de la théorie. Par exemple, **Grp** est la catégorie dont les objets sont les groupes et les flèches de A → B les morphismes de groupe de A vers B. On définit de cette manière :

Mon : la catégorie des monoïdes
Grp : la catégorie des groupes
Ab : la catégorie des groupes Abéliens
Rng : la catégorie des anneaux
AbRng : la catégorie des anneaux Abéliens
A-Mod : la catégorie des A-modules

Plus généralement, pour une signature Σ et une présentation E de Σ-équations :

Σ-Alg : la catégorie des Σ-algèbres
Σ-E-Alg: la catégorie des Σ-E-algèbres

De même pour les structures, algèbres définies avec des relations :

POrd : la catégorie des préordres (les flèches sont les fonctions croissantes).

3.4. Les catégories topologiques

Top la catégorie des espaces topologiques, avec f : A → B ssi f est une fonction continue de A dans B. En fait, la théorie des catégories a commencé ses développements à partir de notions topologiques.

Dom la catégorie des domaines de calcul, avec f : A → B ssi f est une fonction calculable de A dans B. Les domaines sont des demi-treillis complets sous condition, et les fonctions calculables sont des fonctions continues au sens de la topologie induite.

Remarque. Les exemples de grandes catégories sont ceux qui ont motivé le développement de la Théorie des Catégories. L'idée directrice est celle de morphisme, c'est-à-dire d'application qui préserve la structure. Pourtant, la formalisation a appauvri cette notion intuitive, en définissant une catégorie comme un simple graphe de flèches : l'idée essentielle de préservation de structure a été complètement évacuée. C'est pour souligner cette difficulté que nous préférons parler de flèche plutôt que de morphisme.

4. Foncteurs et transformations naturelles

Nous allons maintenant réfléchir la théorie dans la métathéorie, en considérant la catégorie des catégories.

4.1. La catégorie des catégories

On appelle petite catégorie une catégorie dont les objets forment un petit ensemble, et pour tous objets A et B les flèches de A → B forment un petit ensemble. On définit **Cat** comme la catégorie ayant pour objets les petites catégories, et pour flèches les foncteurs entre catégories.

Les foncteurs sont définis comme des applications préservant la structure catégorique. C'est-à-dire, si **A** et **B** sont deux catégories, **F** est un foncteur de **A** vers **B**, ce qu'on écrit **F** : **A** → **B**, ssi **F** associe à tout objet A : **A** un objet **F**(A) : **B** et à toute flèche f : **A**(A,A') une flèche **F**(f) : **B**(**F**(A),**F**(A')), qui préserve la composition :

$$\mathbf{F}(\mathbf{Id}) = \mathbf{Id}$$
$$\mathbf{F}(f;g) = \mathbf{F}(f);\mathbf{F}(g).$$

Il est facile de vérifier que la composition **F**;**G** de deux foncteurs (membre à membre) est bien un foncteur, le foncteur identité **Id** étant défini comme l'identité aussi bien sur les objets que sur les flèches.

Plus généralement, on parlera de foncteur entre deux catégories arbitraires (et non seulement petites) lorque les conditions ci-dessus sont remplies. Remarquez que les composantes d'un foncteur sont des fonctions au sens ensembliste.

4.2. Quelques foncteurs remarquables

• Le foncteur trivial **Nil** : **C** → **1** est le seul foncteur de ce type. Il envoie tout objet (resp. flèche) de **C** vers l'objet (resp. flèche) unique de **1**.

• Pour toutes catégories **C** et **D**, à tout objet A : **C** correspond un foncteur constant **Const**(A) : **D** → **C** qui envoie les objets sur A et les flèches sur Id_A.

• **P** : **Set** → **Set** associe à un ensemble A l'ensemble P(A) de ses parties, et à une fonction f : A → B la fonction P(f) qui fait correspondre à une partie X de A la partie f(X) de B.

• Soit **C** une petite catégorie, A un objet quelconque de **C**. On définit le foncteur **C**(A,-) : **C** → **Set** qui associe à tout objet B : **C** l'ensemble des flèches **C**(A,B), et à toute flèche f : B → C de **C** la fonction f. : **C**(A,B) → **C**(A,C) qui envoie une flèche g : A → B de **C** sur la flèche g;f.

• Les foncteurs d'oubli. Ils sont de type **A** → **B**, où **B** est une catégorie ayant "moins de structure" que **A**. Toute structure A : **A** est donc aussi une structure de **B**, ce qui détermine une injection canonique des objets et des flèches de **A** vers **B** qu'on appelle foncteur d'oubli. Par exemple, on a un foncteur **Oubli**(E-E') : **Σ-E-Alg** → **Σ-E'-Alg** lorsque E' est une partie de E. De même **Oubli**(Σ-Σ') : **Σ-Alg** → **Σ'-Alg** lorsque Σ' est une partie de Σ. Ainsi le foncteur d'oubli de **Grp** → **Mon** fait correspondre à tout groupe la structure de monoïde correspondante, en "oubliant" l'opération d'inverse. A l'extrême, **Oubli**(E) : **Σ-E-Alg** → **Σ-Alg** oublie toutes les équations, **Oubli**(Σ) : **Σ-Alg** → **Set** oublie toutes les opérations, et leur composition **Oubli** : **Σ-E-Alg** → **Set** oublie toute la structure, en associant à une

Σ-E-algèbre son support, et à un Σ-E-morphisme la fonction ensembliste associée.

• Pour les deux cas dégénérés de catégorie, un foncteur entre deux préordres est une fonction monotone, et un foncteur entre deux monoïdes est un morphisme de monoïde. Pour toute catégorie **A** on peut définir un préordre **A** sur ses objets par A≤B ssi il existe une flèche dans A → B. On peut alors définir un foncteur d'oubli de **A** vers **Pre**(**A**), qui consiste à oublier les preuves de ≤, et à ne garder que la prouvabilité.

• Pour toute catégorie **C**, les objets (resp. flèches) de **C** sont en bijection avec les foncteurs de **1** (resp. **2**) vers **C**.

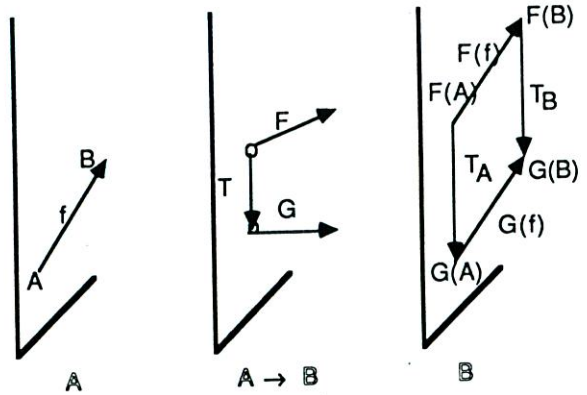
Les foncteurs vont être internalisés en tant qu'objets à leur tour.

4.3. Catégories de foncteurs

Etant données deux catégories **A** et **B**, on forme la catégorie **A** → **B** dont les objets sont les foncteurs de **A** vers **B**, et les flèches les morphismes de foncteurs, appelées transformations naturelles. Plus précisément, si **F** et **G** sont des foncteurs de **A** vers **B**, on appelle transformation naturelle de **F** vers **G** toute application **T** qui fait correspondre à un objet A : **A** une flèche T_A : F(A) → G(A) telle que pour toute flèche f : A → B de **A** on ait :

$$T_A ; G(f) = F(f) ; T_B$$

On note **T** : **F** → **G**. Si l'on pense à **F** comme donnant une image de **A** dans **B**, la transformation **T** donne une traduction de l'image de **F** dans l'image de **G**, comme le suggère la figure suivante :



𝔸 𝔸 → 𝔹 𝔹

Notez que les transformations naturelles se composent naturellement, avec $(\mathbb{T};\mathbb{T}')_A = \mathbb{T}_A ; \mathbb{T}'_A$, ce qui montre que $\mathbb{A} \to \mathbb{B}$ est bien une catégorie, avec $(Id_F)_A = Id_{F(A)}$.

On note le rôle double d'un foncteur de $\mathbb{A}$ vers $\mathbb{B}$, qui peut être considéré comme une flèche de $\mathbb{A} \to \mathbb{B}$ dans **CAT**, ou comme un objet de la catégorie $\mathbb{A} \to \mathbb{B}$. Cette ambiguité n'est pas gênante, c'est même une des forces de la notation. Une autre convention usuelle est de confondre l'objet A avec l'identité Id_A. Notez que la notation $\mathbb{F}(A)$ devient ambigüe, mais de façon compatible avec cette convention, puisque $\mathbb{F}(Id_A) = Id_{F(A)} = \mathbb{F}(A)$. On peut identifier de même la catégorie **C** avec le foncteur $Id : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$, et le foncteur $\mathbb{F}$ avec la transformation naturelle identité $Id_{\mathbb{F}}$, qui associe à un objet A l'objet F(A), vu comme la flèche $Id_{F(A)}$.

Lorsque les "flèches polymorphes" de notre formalisation ont des domaines et co-domaines qui représentent des foncteurs, on obtiendra en général des transformations naturelles. Par exemple, la flèche polymorphe Id de toute catégorie peut être maintenant comprise comme la transformation naturelle : Id_{Id} .

D'ailleurs à toute flèche f : A → B d'une catégorie **C** quelconque correspond une transformation naturelle **Const**(f) qui envoie tout objet sur f.

Exercice : Vérifier que **Const** (dont la partie objet a été définie en 4.2.) est un foncteur de **C** vers $\mathbf{C} \to \mathbf{C}$.

4.4. Quelques transformations naturelles remarquables

• Préordres

Un foncteur entre deux préordres est une fonction monotone. Une transformation naturelle entre deux telles fonctions $\mathbb{F}$ et $\mathbb{G}$ existe si et seulement si on a $\mathbb{F} \leq \mathbb{G}$ avec l'ordre étendu point à point.

• Monoïdes

Un foncteur entre deux monoïdes est un homomorphisme. Une transformation naturelle entre $\mathbb{F}$ et $\mathbb{G}$ exprime que les éléments $\mathbb{F}(f)$ et $\mathbb{G}(f)$ sont conjugués.

• Déterminants

Soit **M** une matrice carrée de dimension n dans l'anneau Abélien **A**. L'ensemble de telles matrices non singulières forme le groupe linéaire $\mathbf{GL}_n(\mathbf{A})$. Si $\mathbf{A}^*$ est le groupe des unités de **A**, **M** est non singulière si et seulement si son déterminant $\mathbb{D}_A(\mathbf{M})$ appartient à $\mathbf{A}^*$, et $\mathbb{D}_A : \mathbf{GL}_n(A) \to \mathbf{A}^*$ est une flèche de **Grp**. On peut alors "voir" le déterminant comme une transformation naturelle $\mathbf{D} : \mathbf{GL}_n \to ()^*$ dans la catégorie de foncteurs **AbRng** → **Grp**.

5. Diagrammes catégoriques

5.1. Définition d'un diagramme commutant

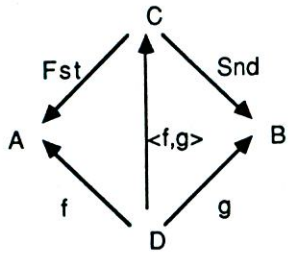
Souvent une propriété catégorique est exprimée par un diagramme : on dessine un graphe dont les sommets sont étiquetés par des objets et les arcs (orientés) sont étiquetés par des flèches. Dire que le diagramme commute, c'est exprimer toutes les égalités entre les expressions formées en composant les flèches sur deux chemins du graphe de même origine et même extrémité. Par convention, on exige que l'un au moins des chemins soit de longueur supérieure à 1.

Un diagramme catégorique ou commutant équivaut donc à un ensemble d'équations entre flèches. Il faut remarquer que cette représentation bi-dimensionnelle d'égalités fonctionnelles est au cœur de la discipline. Historiquement le concept de catégorie est issu de la notation flèche utilisée pour indiquer le type d'une fonction f : A → B.

N.B. Nous disons diagramme commutant et non commutatif, pour ne pas prêter à confusion : le fait qu'un diagramme commute n'a rien à voir avec une propriété de commutativité d'un opérateur.

5.2. Exemple : PROD

Le diagramme



(PROD)

exprime que f : D → A, g : D → B, Fst : C → A, Snd : C→ B et <f,g> : D → C vérifient les équations :

<f,g> ; Fst = f
<f,g> ; Snd = g.

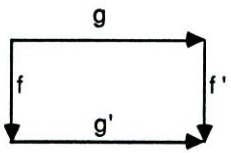
En général, le diagramme spécifie l'existence d'une flèche le faisant commuter. Quelquefois, on postule aussi l'unicité de cette flèche. Ceci revient souvent à poser une équation supplémentaire. Par exemple, si dans le diagramme ci-dessus on postule que pour tous f et g la flèche <f,g> est unique, on obtient une 3ème équation avec une variable h : D → C universellement quantifiée :

<h;Fst , h;Snd> = h.

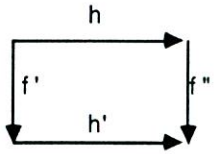
5.3. Quelques secrets cachés

Nous venons de voir que les diagrammes catégoriques peuvent exprimer de façon concise des définitions. Ils servent souvent également à exprimer des preuves. La méthode générale est la suivante : on écrit la propriété recherchée sous forme de diagramme, qu'on décompose en sous-diagrammes plus simples. On prouve indépendamment la commutation des sous-diagrammes, ce qui prouve la propriété par recomposition. Cette recomposition, implicite, est basée sur le lemme suivant :

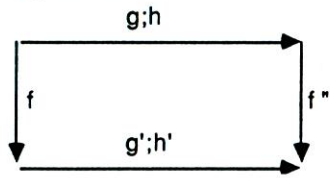
Lemme. Si les sous-diagrammes



et



commutent, alors le diagramme



commute aussi.

Démonstration. Triviale, par associativité de ";".

Corollaire. La commutation d'un diagramme peut être inférée de la commutation de ses sous-diagrammes les plus internes.

Une autre remarque importante est que les foncteurs, en tant que transformations de diagrammes, préservent la commutation (mais pas en général les propriétés d'unicité).

On fait souvent référence à la Théorie des Catégories comme étant triviale, ou développant des abstractions vides de contenu (abstract nonsense). En fait, c'est la grande force de cette théorie que d'abstraire une fois pour toutes les trivialités conséquences de l'associativité de la composition d'opérateurs. La généralité de ses constructions lui donne un rôle à part en Mathématiques, comme Langage de l'Algèbre Universelle.

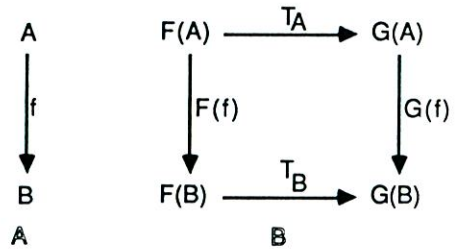
L'idée la plus importante du point de vue méthodologique est la méthode de preuves par diagrammes. Il s'agit de preuves équationnelles sur des expressions fonctionnelles (dénotant des flèches) avec associativité de la composition implicite. Les sous-diagrammes factorisent l'utilisation de lemmes dans les preuves. Peut être convient-il de souligner cet aspect méthodologique, généralement passé sous silence dans les manuels :

Le raisonnement diagrammatique permet de faire simplement des preuves équationnelles compliquées, en utilisant une structure de données de graphes partagés pour représenter les termes et les preuves.

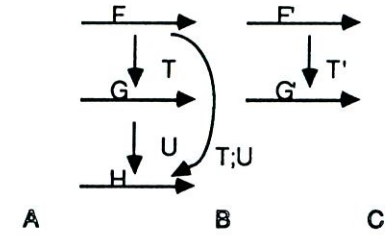
Il faut aussi dissiper un malentendu fréquent : la Théorie des Catégories ne prétend pas se substituer à la Théorie des Ensembles pour servir de fondements aux Mathématiques. Au contraire, la discussion sur les petites et grandes catégories a montré que les problèmes de fondement se posaient avec acuité pour justifier des constructions telles que **CAT**. Signalons que la Théorie des Ensembles peut se reconstruire dans un cadre catégorique. C'est l'objet de la Théorie des Topos, qui sort du cadre de ces notes, et pour laquelle nous renvoyons aux ouvrages de Goldblatt et de Barr et Wells.

5.4. Un exemple plus avancé : la Loi d'Echange

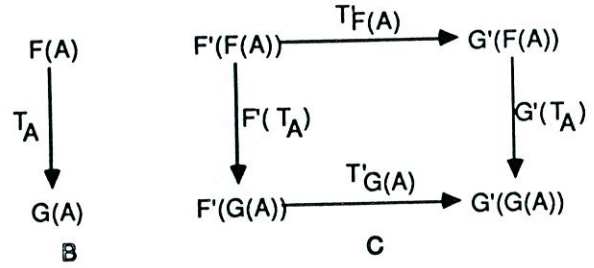
Soit **A** et **B** deux catégories, **F** et **G** deux foncteurs de $\mathbb{A} \to \mathbb{B}$. Rappelons la propriété caractéristique d'une transformation naturelle $T : F \to G$, exprimée maintenant sous forme d'un diagramme commutant :



Si on considère une autre transformation naturelle $U : G \to H$, avec $F, G, H : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$, nous avons vu qu'on pouvait définir une composition ";" qui définit une transformation naturelle $T;U : F \to H$. Considérons maintenant une troisième catégorie **C**, deux foncteurs $F', G' : \mathbb{B} \to \mathbb{C}$, et une transformation naturelle $T' : F' \to G'$. La composition ";" est verticale dans le diagramme :



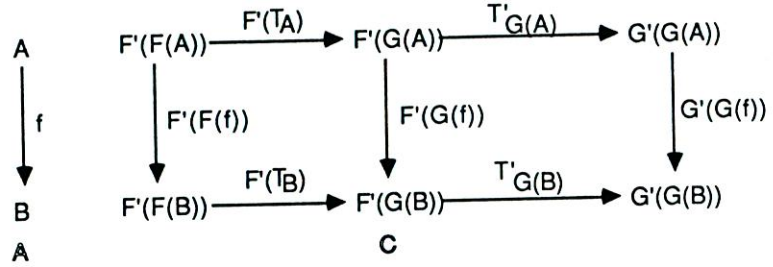
mais on peut également concevoir une composition horizontale induite par la composition des foncteurs $F;F'$ et $G;G'$. Pour $A : \mathbb{A}$ quelconque, le diagramme :



commute, puisque $\mathbb{T}'$ est naturelle pour la flèche $\mathbb{T}_A$. On définit la composition horizontale "*" comme sa diagonale :

$$\mathbb{T} * \mathbb{T}'_A =_{def} \mathbb{T}'_{F(A)}; G'(\mathbb{T}_A) = F'(\mathbb{T}_A); \mathbb{T}'_{G(A)}.$$

On considère maintenant le diagramme suivant, avec f : A → B flèche quelconque de **A** :



Le carré de gauche commute car $\mathbb{T}$ est naturelle et $\mathbb{F}'$ est un foncteur, et celui de droite commute aussi car $\mathbb{T}'$ est naturelle pour la flèche G(f). Le diagramme global commute donc, ce qui montre que $\mathbb{T}*\mathbb{T}'$ est bien une transformation naturelle :

$$\mathbb{T}*\mathbb{T}' : F;F' \to G;G'$$

Exercice. Montrer par raisonnement diagrammatique que * est une loi associative, qui vérifie avec ; la propriété suivante.

Loi d'Echange :

$$(\mathbb{T}*\mathbb{T}');(\mathbb{U}*\mathbb{U}') = (\mathbb{T};\mathbb{U})*(\mathbb{T}';\mathbb{U}')$$

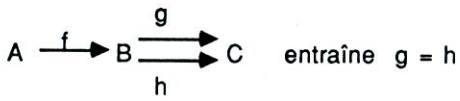
Remarque. La composition horizontale avec l'identité donne :

$$(\mathbb{T}*F)_A = \mathbb{T}_{F(A)}$$
$$(F*\mathbb{T})_A = F(\mathbb{T}_A)$$

Pour cette raison, on appelle parfois * l'application.

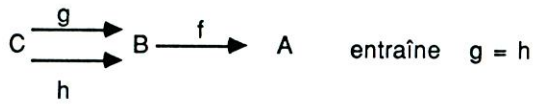
6. Epi, mono, iso et autres définitions indigestes

La flèche f : A → B est un épi ssi :

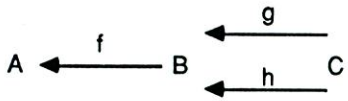


Par exemple, dans **Set**, les épis sont les surjections. Remarquez l'utilité de la convention de non-trivialité dans la définition de diagramme commutant : le diagramme de gauche dit f;g = f;h, mais pas g=h bien sûr.

La flèche f : B → A est un mono ssi :



Par exemple dans **Set** les monos sont les injections. Notez que si on écrit le diagramme de gauche comme :



on remarque l'analogie avec la condition épi; le diagramme est identique, à l'orientation des flèches près. Cette idée importante de dualité sera

explicitée dans la section suivante, de manière à exploiter systématiquement de telles analogies de symétrie.

On dit que la flèche $f : A \to B$ est un iso ssi elle est inversible, c'est-à-dire s'il existe une flèche inverse $f' : B \to A$ telle que $f;f' = Id_A$ et $f';f = Id_B$. Un tel f' est unique, et noté f^{-1}. La flèche Id est bien sûr un iso, avec $Id^{-1} = Id$. Si f et g sont des isos leur composition l'est aussi, et on a : $(f;g)^{-1} = g^{-1};f^{-1}$. On écrit $f : A = B$ si f est un iso, et occasionnellement on emploie la notation $f : A = B : f^{-1}$.

Attention. Appelons épimono une flèche qui est à la fois épi et mono. Dans **Set**, les épimonos, appelées bijections, sont automatiquement des isos. Ce n'est pas toujours le cas. Par exemple, dans 2, la flèche "<" est un épimono, mais n'est pas invertible. Cet exemple montre qu'il faut se méfier des intuitions ensemblistes, et qu'une conjecture catégorique doit être testée sur les petites catégories et les cas dégénérés (monoïdes, préordres, catégories finies) aussi bien que sur les grandes catégories de fonctions.

Deux objets A et B sont dits isomorphes s'il existe un iso $f : A = B$. En particulier, deux catégories $\mathbb{A}$ et $\mathbb{B}$ sont isomorphes s'il existe un foncteur invertible $F : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$. De manière équivalente, F est une bijection sur les objets comme sur les flèches. On écrit également dans ce cas $F : \mathbb{A} = \mathbb{B}$.

Une transformation naturelle $T : F \to G$, avec $F, G : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ est appelée isomorphisme naturel ssi pour tout $A : \mathbb{A}$ la composante $T_A : F(A) \to G(A)$ est un iso de $\mathbb{B}$. On écrit dans ce cas $T : F = G$. Les inverses des composantes définissent alors un isomorphisme naturel $T^{-1} : G = F$.

Les isomorphismes naturels sont donc exactement les flèches de $F \to G$ qui sont des isos. Par exemple **Const**(f) est un isomorphisme naturel ssi f est un iso.

Nous verrons plus loin que les termes d'une théorie équationnelle peuvent être vus comme des foncteurs. Les équations sont alors des isomorphismes naturels, ce qui justifie notre notation.

Un foncteur $F : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ est dit plein ssi pour toute paire A,B d'objets de $\mathbb{A}$ et pour toute flèche $g : F(A) \to F(B)$ de $\mathbb{B}$ il existe une flèche $f : A \to B$ de $\mathbb{A}$ telle que $g = F(f)$. Un foncteur $F : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ est dit fidèle ssi pour toute paire A,B d'objets de $\mathbb{A}$ et pour toute paire de flèches $f,g : A \to B$ de $\mathbb{A}$ l'égalité $F(f) = F(g)$ de flèches de $F(A) \to F(B)$ dans $\mathbb{B}$ entraîne f=g. Par exemple, tout foncteur d'oubli est fidèle. Dans **Cat**, F est fidèle ssi c'est un mono. Les deux propriétés "plein" et "fidèle" sont fermées par composition.

Une sous-catégorie $\mathbb{B}$ d'une catégorie $\mathbb{A}$ est une catégorie constituée de certains de ses objets et flèches, et qui a une composition compatible. Le foncteur d'injection $J : \mathbb{B} \to \mathbb{A}$ est fidèle, comme l'est tout foncteur d'oubli. S'il est aussi plein, on dit que $\mathbb{B}$ est une sous-catégorie pleine de $\mathbb{A}$; dans ce cas $\mathbb{B}$ est complètement caractérisée par le sous-ensemble d'objets de $\mathbb{A}$ choisi.

Finalement, une équivalence entre deux catégories $\mathbb{A}$ et $\mathbb{B}$ est déterminée par deux foncteurs $F : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ et $G : \mathbb{B} \to \mathbb{A}$, avec deux isomorphismes naturels $T : F;G = \mathbb{A}$ et $U : G;F = \mathbb{B}$. Cette notion permet de comparer des catégories semblables mais de tailles différentes.

7. Constructions de catégories

7.1. Dualité

Soit **C** une catégorie arbitraire. On obtient la catégorie duale $\mathbf{C}^\circ$ en renversant toutes les flèches de **C**, les objets restant les mêmes. C'est-à-dire $A : \mathbf{C}^\circ$ ssi $A : \mathbf{C}$, et $f^\circ : A \to B$ dans $\mathbf{C}^\circ$ ssi $f : B \to A$ dans **C**, avec $Id^\circ = Id$, et $(f;g)^\circ = g^\circ;f^\circ$. On a bien sûr $(\mathbf{C}^\circ)^\circ = \mathbf{C}$.

A toute propriété catégorique **P** on peut associer la propriété duale $\mathbf{P}^\circ$ qui est vraie pour $\mathbf{C}^\circ$ ssi **P** est vraie pour **C**. Le diagramme de $\mathbf{P}^\circ$ est obtenu simplement en renversant les flèches du diagramme de **P**.

Par exemple, on dit que 0 est un objet initial de la catégorie **C** ssi pour

tout objet A : **C** il existe une flèche unique dans 0 → A. La définition duale s'énonce donc : 1 est un objet co-initial ou terminal de **C** ssi pour tout objet A : **C** il existe une flèche unique dans A → 1. On vérifie bien que 0 est initial dans **C** ssi il est terminal dans **C°**.

Attention. Si la proposition implique plusieurs catégories et des foncteurs, il faut renverser par dualité les flèches mais **pas** les foncteurs.

A tout foncteur F : **A** → **B** correspond un foncteur F° : **A°** → **B°**, avec F°(A) = F(A) et F°(f) = (F(f°))°. On vérifie que F°(Id) = (F(Id))° = Id° = Id et F°(f;g) = (F(f;g)°)° = F(g°;f°)° = (F(g°);F(f°))° = F(f°)°;F(g°)° = F°(f);F°(g).

Par contre, l'opérateur "°" lui-même n'est pas directement un foncteur, puisqu'il renverse le sens des flèches. On appelle foncteur contravariant de **A** vers **B** un foncteur de **A°** vers **B**. On peut maintenant considérer "°" comme le foncteur contravariant identité. Lorsque la confusion est possible, on parlera de foncteur covariant pour un foncteur direct.

Par exemple, le foncteur flèche **C**(A,-) vu en 4.2. est covariant. On peut définir de façon symétrique un foncteur contravariant de **C** vers **Set**. Le foncteur flèche° **C**(-,B) : **C°** → **Set** associe à tout objet A : **C** l'ensemble des flèches **C**(A,B) et à toute flèche f : C → A de **C** la fonction f* : **C**(A,B) → **C**(C,B) qui envoie une flèche g : A → B de **C** sur la flèche f;g.

7.2. Représentations : le Lemme de Yoneda

Tout monoïde peut être considéré comme une catégorie. Un foncteur de **Mon**→**Set** associe à un monoïde **M** un ensemble A et à un élément x de **M** son action sur A. Plus généralement, pour une catégorie arbitraire **C**, on peut considérer la catégorie des foncteurs **C**→**Set** comme l'espace des représentations de la catégorie **C**.

Dans cette catégorie de représentations, les foncteurs flèches **C**(A,-) définissent une sous-catégorie qui représente fidèlement **C** dans le sens suivant.

On définit l'application de Yoneda **Y** qui associe à l'objet C : **C** le foncteur flèche **Y**(C) = **C**(C,-) et à la flèche f : A → B de **C** la transformation naturelle **Y**(f) : **C**(B,-) → **C**(A,-) telle que Y(f)(C) associe à la flèche h : **C**(B,C) la flèche f;h : **C**(A,C).

Lemme de Yoneda. **Y** est un foncteur contravariant, c'est à dire:

Y : **C°** → (**C**→**Set**).

De plus, **Y** est plein et fidèle.

De manière duale, l'application **Z** qui associe à l'objet C : **C** le foncteur flèche° **Z**(C) = **C**(-,C) et à la flèche f : A → B de **C** la transformation naturelle **Z**(f) : **C**(-,A) → **C**(-,B) telle que **Z**(f)(C) associe à la flèche h : **C**(C,A) la flèche h;f : **C**(C,B), est un foncteur plein et fidèle :

Z : **C** → (**C°**→**Set**).

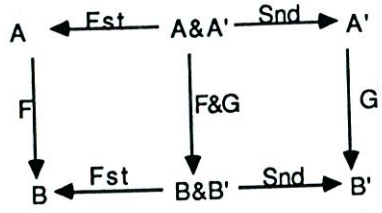
7.3. Produit

Soient **A** et **B** deux catégories. On définit la catégorie **A** & **B** produit de **A** et **B** en prenant pour objets les paires (A,B) avec A : **A** et B : **B** et pour flèches de (A,B) vers (C,D) les paires (f,g) avec f : A → C flèche de **A** et g : B → D flèche de **B**.

On peut définir des foncteurs de projection **Fst** : **A&B** → **A** et **Snd** : **A&B** → **B**. Par exemple, **Fst**(A,B) = A et **Fst**(f,g) = f, et symétriquement pour **Snd**. De plus, **Fst** et **Snd** sont "universels" dans le sens suivant. Pour toute catégorie **C** et tous foncteurs F : **C** → **A** et G : **C** → **B**, il existe un foncteur unique H : **C** → **A&B** tel que H;**Fst** = F et H;**Snd** = G. En effet, on doit avoir H(C) = (F(C),G(C)) pour tout C : **C** et H(h) = (F(h),G(h)) pour tout h : C → A&B, ce qui détermine H. On vérifie que H est bien un foncteur, que nous noterons **<F,G>**. On remarque que le diagramme (PROD) vu en 5.2. est vérifié dans **CAT**.

On peut maintenant définir le produit **F & G** de deux foncteurs F : **A** → **B**

et G : A' → B' comme le foncteur unique qui fait commuter le diagramme :



Cat

Autrement dit, on définit :

$$F \& G = \langle Fst ; F , Snd ; G \rangle$$

On a donc construit un double produit, qui envoie une paire de catégories (A,B) sur A&B, et une paire de foncteurs (F,G) sur F&G. Comme l'opérateur "&" vérifie les équations fonctorielles, on peut le considérer comme un foncteur & : Cat&Cat → Cat. Autrement dit, grâce au produit de catégories nous avons maintenant la notion de foncteur en plusieurs variables.

La construction de produit est similaire au produit cartésien de Set, au produit direct de Grp, à la topologie produit de Top, etc... C'est donc une construction qu'on peut abstraire au niveau catégorique, comme nous le verrons au Ch. II.

7.4. Exponentiation

C'est la construction de la catégorie des foncteurs A→B que nous avons déjà vue en 4.3. Ses objets sont les foncteurs de A vers B, et ses flèches sont les transformations naturelles.

Cette construction définit elle-même un foncteur covariant en B et contravariant en A, que l'on note → : (Cat° & Cat) → Cat. Nous

connaissons déjà sa partie objet, A→B, qui est la catégorie des foncteurs entre A et B. Il nous reste à comprendre sa partie flèche.

Soit F : A' → A et G : B → B' deux foncteurs arbitraires. On définit le foncteur F→G entre les catégories A→B et A'→B' comme suit. Sa partie objet fait correspondre au foncteur H : A→B le foncteur F;H;G : A'→B'. Sa partie flèche associe à la transformation naturelle T : H → K, avec H,K : A→B, la transformation naturelle U = F;T;G.

Attention. Dans la dernière expression, F dénote la partie objet du foncteur F, tandis que G dénote la partie flèche de G. La composition a son sens ensembliste : U associe à l'objet X de A' la flèche $G(T_{F(X)})$ de B'.

Exercice : Démontrez que U est bien une transformation naturelle entre les foncteurs F;H;G et F;K;G.

II - Constructions universelles

1. Concept d'universalité

Nous sommes passés de la notion de flèche à celle de foncteur par un principe de réflexion entre une catégorie arbitraire **A** et la catégorie **Cat**. Puis nous avons vu un certain nombre de constructions de catégories. On utilise maintenant le principe de réflexion dans le sens inverse pour dégager des constructions universelles dans une catégorie **A** donnée.

Par exemple, un groupoïde est une catégorie telle que toute flèche est iso. Tout comme une catégorie pouvait être considérée comme l'espace des preuves d'un préordre, un groupoïde peut être vu comme espace des preuves d'une relation d'équivalence. Dans le cas d'un objet unique, on retrouve le concept familier de groupe.

2. Objet terminal, objet initial

A partir de maintenant, on se place dans une catégorie arbitraire.

2.1 Objet terminal

Un objet 1 est dit terminal ssi pour tout objet A il existe une flèche unique Nil : $A \to 1$.

La propriété fondamentale dans la définition ci-dessus est bien sûr l'unicité de la flèche. Il peut y avoir plusieurs objets terminaux, mais si 1 et 1' sont terminaux, la flèche Nil : $1 \to 1'$ est un iso; l'objet terminal est donc unique, à isomorphisme près.

Donnons quelques exemples de catégories admettant des objets terminaux.

- Pour un préordre, un objet est terminal ssi c'est un élément maximum.
- Pour un monoïde, seul le monoide trivial **1** réduit à l'unité {1} admet un

objet terminal 1.

- **Mon : 1** est terminal
- **Set** : tout ensemble singleton est terminal
- **Cat : 1** est la catégorie terminale

2.2. Objet initial

Par dualité, on obtient la définition d'un objet initial 0, tel que pour tout objet A il existe une flèche unique dans $0 \to A$. Par exemple :

- Pour un préordre, un objet est initial ssi c'est un élément minimum.
- Pour un monoïde, seul le monoïde trivial **1** admet un objet initial 1.
- **Mon : 1** est initial
- **Set** : Ø est initial
- **Cat : 0** est la catégorie initiale
- **Σ-Alg** : $\mathbf{T}(\Sigma)$ est la Σ-algèbre initiale, à un isomorphisme près
- **Σ-E-Alg** : $\mathbf{T}(\Sigma)/=_E$ est la Σ-E algèbre initiale. Par exemple, le groupe finiment présenté par un ensemble de générateurs G et un ensemble de relations R est obtenu en prenant pour Σ l'union de l'ensemble des opérateurs $\{*,1,^{-1}\}$ et des éléments de G pris comme constantes, et pour E l'union des axiomes de groupe et des égalités $r=1$ pour r dans R.

2.3. Eléments

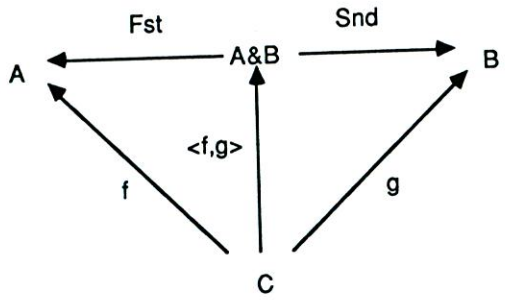
On appelle élément de l'objet A : **C**, quand **C** admet un objet terminal 1, toute flèche $x : 1 \to A$. On écrit $x : A$.

On note que l'ambiguité résultante dans **Cat** n'est pas gênante, car les foncteurs de 1 → **A** sont en bijection avec les objets de **A** : les éléments d'une catégorie sont ses objets! De même, dans **Set**, les éléments d'un ensemble au sens catégorique sont ses éléments au sens usuel, ce qui justifie la terminologie.

3. Produit et somme catégoriques

3.1. Produit : Définition

Une catégorie **C** admet un produit ssi pour tous objets A,B il existe un objet A&B et des flèches Fst : A&B → A et Snd : A&B → B telles que pour tout objet C et pour toutes flèches f : C → A et g : C → B il existe une flèche unique <f,g> : C → A&B faisant commuter le diagramme :



(PROD)

3.2. Exemples de produits

Le concept de produit généralise aux catégories le concept familier de borne inférieure. Par exemple, les catégories suivantes admettent des produits :

• Tout préordre qui a la structure d'un inf-demi-treillis. Par exemple, sur **N** muni de l'ordre de divisibilité, le pgcd est un produit.

• Le monoïde **1** possède trivialement un produit.
Exercice : construire un monoïde sur **N** admettant un produit.

• **Set** : Le produit Cartésien A X B est un produit. Le produit symétrique B X A en définit un autre. C'est d'ailleurs toujours le cas : B&A définit un produit symétrique du produit A&B, en renversant les rôles de Fst et Snd. Il faut par contre souligner que le diagramme PROD est lui parfaitement symétrique, alors que la définition du produit Cartésien comme l'ensemble des paires d'éléments {a,{a,b}} ne l'est pas, ce qui montre bien que le produit est une notion de nature catégorique.

• **Grp**, **Top**, ... : le produit direct est un produit.

3.3. Formalisation : la théorie Prod

Nous allons maintenant écrire formellement la propriété exprimée diagrammatiquement ci-dessus. On déclare les opérateurs :

$$\& : C \,\&\, C \to C$$

$$Fst : A \,\&\, B \to A$$
$$Snd : A \,\&\, B \to B$$
$$<-,-> : C \to A \,,\, C \to B \;|\!-\; C \to A \,\&\, B$$

et les équations :

P1 : <f,g> ; Fst = f
P2 : <f,g> ; Snd = g
UP : <h;Fst , h;Snd> = h

Quelques explications complémentaires s'imposent. Tout d'abord, pour les opérateurs. Il y en a de deux sortes. L'opérateur & est déclaré comme foncteur, du produit de catégories **C&C** dans la catégorie **C**. Ceci nécessite deux vérifications : dans **C**, que & est bien un foncteur, et dans **Cat**, que le produit **&** vérifie bien toutes les équations ci-dessus, ce qui justifie la

terminologie et les notations.

Ensuite, les opérations de flèches sont déclarées comme opérateurs polymorphes, de types des séquents de la forme M → N, où M et N sont des termes composés de foncteurs et d'objets (constantes et variables) de **C**. Par exemple, Fst et Snd sont des constantes polymorphes en les variables A et B, alors que <-,-> est un opérateur binaire polymorphe en A,B et C. La virgule "," et le signe d'inférence "|-" appartiennent au méta-langage. Il faut lire une telle déclaration comme une règle d'inférence entre schémas de séquents, la flèche "→" étant interprétée comme la déduction logique :

$$\frac{C \to A \qquad C \to B}{C \to A \,\&\, B}$$

&-intro

et on reconnaît le schéma familier &-intro du calcul intuitioniste des séquents de Gentzen. De même Fst (resp. Snd) correspond à la règle &-élim gauche (resp. droite).

Enfin, les équations **P1**,**P2** et **UP** contiennent des variables de flèches f,g et h universellement quantifiées, et les types sont implicites. En fait, les déclarations d'opérateurs peuvent être utilisées pour inférer un type principal à toute variable; par exemple on trouve h : C → A&B dans l'équation **UP**, avec A et B deux variables d'objet, c'est-à-dire de type **C**.

Les équations **P1** et **P2** proviennent de conditions d'existence, et correspondent à la commutation des deux triangles du diagramme PROD. Ces équations, orientées de la gauche vers la droite, peuvent être considérées comme des règles de simplification; du point de vue logique ce sont des coupures au sens de la théorie de la démonstration, expriman des détours inutiles dans une preuve. L'équation **UP** provient par contre d l'unicité du produit; elle exprime une condition de fermeture, stipulant qu seule la paire peut construire des produits. Cette équation joue un rôl analogue à la clause de complétude d'une définition inductive.

On voit donc que le diagramme (avec la quantification précise de toutes les quantités qui y apparaissent) cache une spécification équationnelle relativement complexe. Toutes les manipulations équationnelles traditionnelles, pourvu qu'elles respectent les types, sont applicables. Par exemple, on peut montrer par raisonnement équationnel les équations dérivées suivantes :

IP : <Fst,Snd> = Id
DisP : h;<f,g> = <h;f , h;g>.

En effet, **IP** se déduit de **Idr** et **UP**, et **DisP**, la distributivité de la composition sur le produit, se déduit de **Ass**, **P1**, **P2** et **UP**. Bien sûr de nouveau les types sont implicites, par exemple Id : A&B → A&B dans **IP**. Ces preuves sont expliquées naturellement par des diagrammes, mais il faut aussi connaître leur explicitation formelle. Il est intéressant par exemple de noter que l'ensemble {**Ass**,**Idl**,**Idr**,**P1**,**P2**,**UP**,**IP**,**DisP**} forme un ensemble canonique de simplifications, qui détermine une forme normale unique des expressions de flèche dans la théorie **Prod**.

Comme promis, nous donnons maintenant la partie flèche du foncteur &, en définissant :

& : A → B , C → D |- A&C → B&D
D& : f & g = <Fst;f , Snd;g>

Exercice: montrer que & est un bi-foncteur covariant en ses deux arguments, et que dans **Cat** le foncteur & a les bonnes propriétés.

3.4. Produits finis

On dit que **C** admet des produits finis ssi elle possède un produit et un élément terminal. Ceci revient donc à compléter la théorie équationnelle **Prod** ci dessus en une théorie **Prods** par les définitions :

1 : **C**
Nil : A → 1

UN : h = Nil

Dans l'équation d'unicité **UN**, on a $h : A \to 1$, ce qui empêche la théorie équationnelle d'être triviale. On note la conséquence immédiate de **UN** :

NZ : f;Nil = Nil

qui exprime que Nil est zéro à droite pour la composition, et où f est une flèche arbitraire $f : A \to B$.

Avec la paire et Nil on peut maintenant construire des listes, ou n-uplets de flèches. On définit récursivement :

$$() = \text{Nil}$$
$$(f_n \dots f_2\, f_1) = \langle (f_n \dots f_2) , f_1 \rangle$$
$$\pi_1 = \text{Snd}$$
$$\pi_{n+1} = \text{Fst};\pi_n$$

avec les propriétés de projection usuelles. Du point de vue logique, on a maintenant des séquences qui peuvent servir à représenter des séquents, c'est-à-dire des déductions à partir d'une liste d'hypothèses. Mais on a également défini la conjonction & (ce qui justifie la notation), la constante 1 représentant pour sa part la valeur de vérité "Vrai".

Plus précisément, définissons un sous-ensemble $\mathbf{C}^*$ d'objets de **C**, que nous appelerons contextes de **C**. On commence par définir récursivement $\mathbf{C}^n$ avec n entier naturel :

$$\mathbf{C}^0 = \{1\}$$
$$\mathbf{C}^{n+1} = \{E \,\&\, A \mid E : \mathbf{C}^n, A : \mathbf{C}\}.$$

Si $E : \mathbf{C}^n$ on dit que E est un contexte de longueur n, et on écrit $n = |E|$. Si $1 \le i \le |E|$, on définit la i-ème composante E_i de E récursivement, par :

$$(E \,\&\, A)_i = \begin{cases} A & \text{si } i=1 \\ E_{i-1} & \text{si } i>1. \end{cases}$$

On définit alors $\mathbf{C}^*$ comme l'union de tous les $\mathbf{C}^n$. On peut maintenant typer plus précisément les flèches de projection relativement à un contexte E, que nous écrirons $\pi_E(n) : E \to E_n$.

On peut bien sûr aussi construire la structure de donnée d'arbre binaire, les fonctions de projection étant maintenant associées à des mots de $\{1,2\}^*$. La notion correspondante de preuve à partir d'un arbre d'hypothèses est moins classique.

Finalement, notons que toute catégorie admettant des produits finis possède un certain nombre d'isomorphismes naturels :

<Fst;Fst,<Fst;Snd,Snd>> : (A & B) & C = A & (B & C) : <<Fst,Snd;Fst>,Snd;Snd>
Fst : A & 1 = A : <Id,Nil>
Snd : 1 & A = A : <Nil,Id>

Exercice. Montrer que tout diagramme composé à l'aide des isomorphismes ci-dessus et de leurs inverses, commute. Etudier si cette propriété reste vraie si l'on rajoute l'isomorphisme supplémentaire :
<Snd,Fst> : A & B = B & A : <Snd,Fst>.

3.5. Compilation de la théorie à partir du diagramme

Il est possible de systématiser l'écriture de la théorie équationnelle à partir du diagramme catégorique. Il faut tout d'abord être très soigneux en écrivant complètement le préfixe de quantification des variables utilisées dans le diagramme. On obtient les déclarations de la théorie à partir du préfixe de quantification, qu'on écrit sur deux lignes, en séparant les quantifications portant sur des objets de celles portant sur des flèches.

Pour chaque ligne, on Skolémise, en remplaçant chaque variable quantifiée existentiellement par une nouvelle constante, appliquée à des arguments qui sont toutes les variables quantifiées universellement qui la précèdent sur la même ligne. Sur la première ligne on obtient les foncteurs, et sur la deuxième les constructeurs de flèches; le type de ces derniers peut être lu sur le diagramme.

Les équations sont obtenues en écrivant les diagrammes commutants les plus internes. On traite les quantifications "Existe h unique t.q. ..." comme "Existe h t.q. ...", ce qui donne par Skolémisation $H(f_1,\ldots,f_n)$, et on écrit l'équation supplémentaire $H(F_1(h),\ldots,F_n(h))=h$, où on a remplaçé f_i par $F_i(h)$ en utilisant le diagramme.

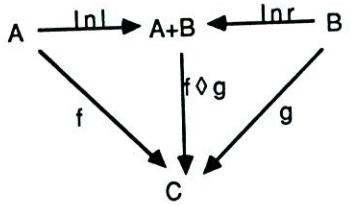
Exercice : Utiliser cette méthode pour obtenir la théorie **Prod.**

La méthode de compilation esquissée ci-dessus est un peu naïve, et il convient de la raffiner pour des propriétés catégoriques plus compliquées. Par exemple, il convient de mettre la formule logique en forme "miniscope", de manière à ne pas introduire par Skolémisation de dépendance non nécessaire. Par contre, il n'est pas toujours possible de Skolémiser indépendamment les objets et les flèches, lorsque le diagramme exprime une dépendance complexe. Enfin, la théorie obtenue n'est pas toujours simplement équationnelle, et en général on obtient des clauses de Horn, c'est-à-dire des équations conditionnelles de la forme :

$$M_1 = N_1 , M_2 = N_2 , \ldots , M_n = N_n \Rightarrow M = N.$$

3.6. Somme ou co-produit

La somme, ou co-produit, est la notion duale de celle de produit. On obtient donc son diagramme en renversant les flèches du diagramme PROD :



(SOMME)

D'où la théorie :

$$+ : C \& C \rightarrow C$$

$$Inl : A \rightarrow A + B$$
$$Inr : B \rightarrow A + B$$
$$\Diamond : A \rightarrow C , B \rightarrow C \ |\!- \ A + B \rightarrow C$$
S1 : Inl; f◊g = f
S2 : Inr; f◊g = g
US : (Inl;h) ◊ (Inr;h) = h

On peut penser à l'opérateur ◊ comme le conditionnel qui compose deux actions en une. Les opérateurs Inl et Inr sont analogues aux valeurs de vérité utilisées pour choisir une branche ou l'autre du conditionnel.

L'interprétation logique de + est la disjonction intuitioniste. Les opérateurs Inl, Inr et ◊ peuvent être reconnus comme les règles d'inférence +-Intro-gauche, +-Intro-droite et +-Elim respectivement. **S1** et **S2** sont les coupures, et **US** la propriété de clôture.

Il est clair que **C°** admet une somme ssi **C** admet un produit, et réciproquement. Donnons quelques exemples familiers de sommes :

- Tout préordre qui a la structure d'un sup-demi-treillis. Par exemple, sur **N** muni de l'ordre de divisibilité, la somme est le ppcm.
- **1** possède trivialement une somme
- **Set** : la somme disjointe est une somme, et on peut définir de manière analogue une somme + de catégories dans **Cat**
- **Grp**, **Top**, ... : la somme directe est une somme.

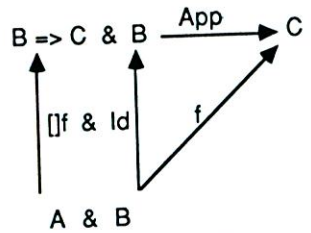
On peut maintenant montrer que + est un foncteur de **C&C** → **C**, avec :

$$+ : A \rightarrow B \ , \ C \rightarrow D \ |\!- \ A+C \rightarrow B+D$$
D+ : f + g = f;Inl ◊ g;Inr.

4. Exponentiation

4.1. Définition

On se place dans une catégorie **C** qui admet un produit &. On dit que **C** admet une exponentiation ⇒ ssi pour toute paire d'objets B,C : **C** il existe un objet B ⇒ C : **C** tel qu'il existe une flèche App : ((B ⇒ C) & B) → C telle que pour tout objet A : **C** et pour toute flèche f : A&B → C il existe une flèche unique []f : A → (B ⇒ C) faisant commuter le diagramme :



(EXP)

On appelle App la flèche d'application, et on dit que [] est l'opération d'abstraction, qui fait passer d'une flèche binaire f à sa forme Curryfiée []f. Une catégorie qui possède les produits finis et l'exponentiation est dite calculatoire. Les catégories calculatoires sont les catégories d'objets fonctionnels.

La caractéristique principale d'une catégorie calculatoire est que ses flèches sont représentables dans ses objets. Nous verrons en effet que dans une catégorie calculatoire il existe une bijection entre les flèches de A → B et les éléments de l'objet A ⇒ B.

Donnons tout d'abord la théorie **Exp** associée à une catégorie calculatoire :

4.2. La théorie Exp

Cette théorie est un prolongement de la théorie **Prods** des catégories avec produits finis, dont elle utilise les opérateurs.

⇒ : C° & C → C
App : A ⇒ B & A → B
[] : A & B → C |- A → B ⇒ C
EV : []f & Id ; App = f
UE : [](h & Id ; App) = h.

On reconnaît les règles d'inférence correspondant à l'implication intuitioniste : App est un schéma d'axiome inspiré de la règle Modus Ponens, qui joue ici le rôle de ⇒-élim, alors que l'abstraction [], une forme du théorème de déduction, joue ici le rôle de ⇒-intro.

La règle **EV** , ou règle d'évaluation, est la coupure correspondante à ⇒. D'un point de vue informatique, il faut voir une flèche f : A → B comme un programme qui, dans un environnement de type A, donnant des valeurs à ses variables globales, retourne un résultat de type B. Les environnements sont construits naturellement par des produits finis. Une flèche f : A&B → C a donc son dernier argument, appelons le x, de type B. Il est possible d'abstraire l'argument x pour produire la fermeture $[x]f_x$, représentée par la flèche []f : A → B⇒C. En présence de l'argument X : B, la paire <[]f , X> peut être évaluée dans un environnement de type A pour produire la valeur f_X. C'est précisément le rôle de l'algorithme d'application App, et c'est ce que signifie la règle **EV**. La règle d'unicité de l'exponentiation **UE** est ici encore une condition de complétude, qui dit que seule la règle d'abstraction construit des fermetures, c'est-à-dire des valeurs fonctionnelles.

Cette discussion montre qu'il y a un lien très étroit entre les algorithmes d'une théorie calculatoire (les flèches d'une catégorie calculatoire) et les preuves d'une logique propositionnelle intuitioniste. Dans notre cadre précis, ces preuves sont les expressions d'un lambda-calcul typé. Nous expliciterons ce lien en 4.5., mais tout d'abord donnons quelques conséquences équationnelles de la théorie **Exp** :

IE : []App = Id

Red : <[]f , x>;App = <Id, x> ; f
Dist[] : f ; []g = [] (f&Id ; g).

On laisse en exercice la dérivation de ces égalités, et on définit :

$[]^{-1}$ f = f&Id ; App.

Il est aisé de montrer :

B[] : $[]^{-1}[]f = [][]^{-1} f = f$
FI : App = $[]^{-1}$Id

et on voit donc que l'opération d'abstraction définit une bijection entre les flèches de A&B → C et celles de A → B⇒C, l'opération d'application correspondant à l'identité fonctionnelle.

On peut maintenant montrer que ⇒ est un foncteur de **C°&C → C**, avec :

⇒ : C → A , B → D |- A⇒B → C⇒D
D⇒ : f ⇒ g = [](Id&f;App;g)

Exercice. Montrer par raisonnement équationnel la fonctorialité de ⇒.

Finalement, on note les isomorphismes naturels :

<Id,Nil>;App : T ⇒ A = A : []Fst
Nil : A ⇒ T = T : []Nil

et on remarque que les flèches de A→B sont en correspondance avec les éléments de l'objet fonctionnel A⇒B, par la bijection ξ définie par ξ(f) = [](Snd;f). Toute catégorie calculatoire est donc fermée, en ce sens que ses flèches sont internalisées en tant qu'éléments d'objets fonctionnels.
En anglais, une catégorie calculatoire est appelée "cartesian closed category", CCC en abrégé.

4.3. Exemples de catégories calculatoires

• **Set** est un catégorie calculatoire, avec A⇒B l'ensemble des fonctions de A vers B.

• **Cat** en est une également, avec A⇒B la catégorie des foncteurs A→B.

Exercice. Déterminer le foncteur **App**, et l'isomorphisme d'abstraction de foncteurs [].

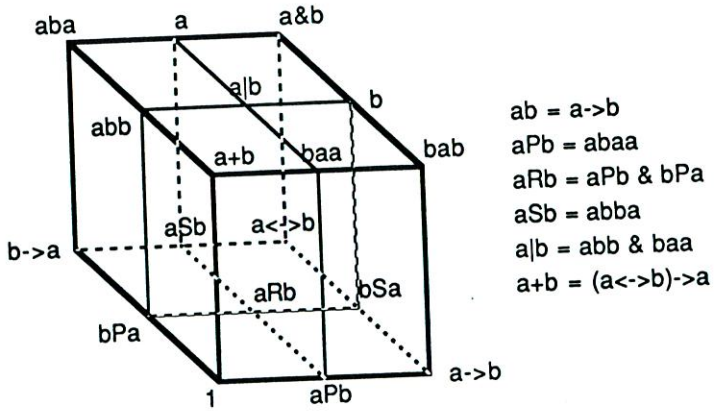
• Un treillis muni d'un élément minimum, considéré en tant que catégorie, est calculatoire si et seulement si c'est une algèbre de Heyting, c'est à dire un modèle du calcul des propositions intuitioniste. Ce qui motive les considérations logiques suivantes.

4.4. Le point de vue logique

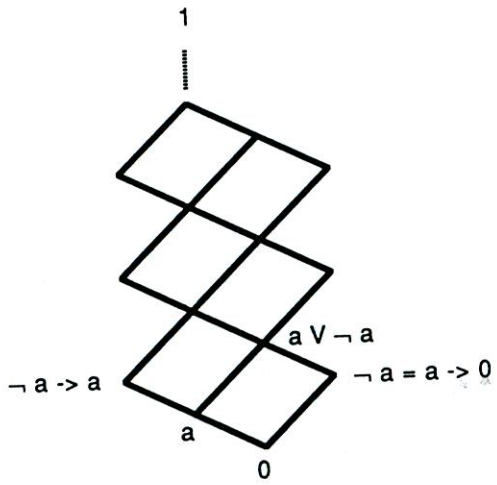
Beaucoup d'auteurs confondent les deux flèches, et écrivent A→B au lieu de A⇒B. Nous préférons distinguer, comme il est d'usage en logique de distinguer entre la flèche de déduction des séquents et la flèche d'implication des propositions, bien que dans le cas intuitioniste ces flèches soient essentiellement les mêmes.

Remarquez que la bijection ξ prouve le théorème de déduction, dans le calcul propositionnel intuitioniste avec conjonction & et vérité 1. Plus précisément, si on se donne un ensemble P de propositions élémentaires, on obtient un calcul propositionnel sur P en considérant la catégorie calculatoire libre sur P, **Exp**(P), définie comme objet initial dans la catégorie des catégories calculatoires admettant A comme objet pour tout A dans P. Les flèches de A → B sont alors les preuves de B à partir de l'hypothèse A. Le quotient par isomorphisme des objets d'une telle catégorie est une algèbre implicationnelle. Si P est fini, une telle algèbre est finie, comme l'a montré de Bruijn. Par exemple, pour P={A,B}, on obtient le cube de Skolem ci-dessous.
On obtient de manière analogue un calcul intuitioniste complet en se plaçant dans une catégorie calculatoire possédant les sommes finies. L'élément initial 0 est la valeur de vérité "Faux", et la somme + est la disjonction intuitioniste. Le quotient par isomorphisme des objets d'une telle catégorie est une algèbre de Heyting. Contrairement au cas précédent, l'algèbre engendrée par un élément est infinie, c'est le treillis de jardin de

Nishimura.



Le cube de Skolem



Le treillis de Nishimura

4.5. Le point de vue calculatoire.

Soit **C** une catégorie calculatoire. Nous allons définir un calcul associé à **C** comme suit. On définit récursivement la relation "M est un terme de type A dans le contexte E", avec A : **C** et E : **C***, ce qu'on écrit E |- M : A, par :

Variable : Si $1 \le n \le |E|$, alors $E \vdash n : E_n$

Abstraction : Si E&A |- M : B, alors E |- [A]M : A⇒B

Application : Si E |- M : A⇒B et E |- N : A, alors E |- (M N) : B

On reconnaît la définition des termes d'un lambda-calcul typé, dans la notation de de Bruijn. Il est commode d'utiliser une représentation concrète de ces termes sous forme de lambda-expressions avec des noms de variables, en associant un nom à chaque opération d'abstraction. Par exemple, le terme [A](1 [B](1 2)) peut être représenté par l'expression plus lisible [x:A](x [y:B](y x)). Il est facile de formaliser une telle représentation, nous laissons cet exercice au lecteur. Dans le lambda-calcul originel de Church, on écrivait $\lambda x_A.M$ au lieu de [x:A]M (d'où le nom lambda-calcul).

Nous allons maintenant traduire nos termes par des flèches, en associant à tout terme M, avec E |- M : A, une flèche $F_E(M) : E \to A$ de **C** :

$$F_E(n) = \pi_E(n)$$
$$F_E([A]M) = \Lambda F_{E\&A}(M)$$
$$F_E((M\ N)) = \langle F_E(M) , F_E(N)\rangle ; App$$

Exemple. L'expression [f: Nat⇒Nat][x: Nat](f (f x)), correspondant au terme [Nat⇒Nat][Nat](2 (2 1)), de type (Nat⇒Nat)⇒(Nat⇒Nat) dans le contexte vide 1, se traduit en la flèche :

$\Lambda\Lambda(\langle Fst;Snd\rangle , \langle Fst;Snd , Snd\rangle ;App)\rangle ;App) : 1 \to (Nat\Rightarrow Nat)\Rightarrow(Nat\Rightarrow Nat)$.

L'avantage de l'écriture sous forme de termes est qu'il n'y a jamais de confusion possible des variables par leur nom : chaque variable est nommée de manière non ambigüe par la distance à son lieur, c'est-à-dire l'opérateur

d'abstraction qui l'introduit. L'inconvénient de cette écriture est qu'il faut expliciter des opérations de relocation pour les termes contenant des variables libres. Par exemple, on définit pour tout terme M le terme M^+ obtenu en augmentant de 1 toutes les références de ses variables libres. Formellement, on a $M^+ = R^0(M)$, avec :

$$R^i(k) = \begin{cases} k \text{ si } k<i \\ k+1 \text{ si } k\geq i \end{cases}$$
$$R^i([A]M) = [A]R^{i+1}(M)$$
$$R^i((M\ N)) = (R^i(M)\ R^i(N))$$

On définit sur les termes une opération de substitution aux variables libres, comme suit. Soit $E \vdash M : A$, et $1\leq n\leq |E|$. On définit le terme $M' = M\{n\leftarrow N\}$ par récurrence sur la construction de M :

Si $M = n$, alors $M' = N$
Si $M = k<n$, alors $M' = k$
Si $M = k>n$, alors $M' = k-1$
Si $M = [B]M_1$, alors $M' = [B]M''$ avec $M'' = M_1\{n+1\leftarrow N^+\}$
Si $M = (M_1\ M_2)$, alors $M' = (M'_1\ M'_2)$ avec $M'_i = M_i\{n\leftarrow N\}$ pour i=1,2.

Exercice. Montrer que la substitution préserve les types, c'est-à-dire que $E \vdash N : E_n$ entraîne $E \vdash M\{n\leftarrow N\} : A$.

On définit maintenant $M\{N\}$ comme $M\{1\leftarrow N\}$, et on munit l'ensemble des termes d'une relation de calcul $\rightarrow$ définie par :

$$\beta : ([A]M\ N) \rightarrow M\{N\}$$
$$\text{Si } M \rightarrow M' \text{ alors } [A]M \rightarrow [A]M'$$
$$\text{Si } M \rightarrow M' \text{ alors } (M\ N) \rightarrow (M'\ N)$$
$$\text{Si } M \rightarrow M' \text{ alors } (N\ M) \rightarrow (N\ M')$$

Exercice. Il est clair par l'exercice précédent que le calcul préserve les types. Montrer que le calcul préserve aussi la valeur des termes, au sens de leur traduction en flèches. C'est-à-dire que si $E \vdash M : A$ et $M \rightarrow N$, alors $F_E(M) = F_E(N)$ en tant que flèches de $E \rightarrow A$ dans C.

La relation de calcul présentée ci-dessus s'appelle historiquement la β-réduction en lambda-calcul. Nous venons de voir que les lambda-calculs typés pouvaient se traduire en flèches d'une catégorie calculatoire dont les objets correspondent aux types du calcul. De plus, les équations de la théorie **Exp** peuvent servir à simuler les calculs. On peut donc considérer le formalisme des catégories calculatoires comme plus primitif que celui du lambda-calcul, et étudier des machines abstraites ayant pour opérations de base certaines simplifications valides dans la théorie **Exp**. Ceci est particulièrement intéressant, dans la mesure où les langages de programmation sont souvent basés sur des lambda-calculs typés. Les termes en forme normale, c'est-à-dire maximaux relativement à $\rightarrow$, peuvent être considérés comme des valeurs du domaine de calcul sous-jacent.

On peut montrer que la relation de calcul ci-dessus possède un certain nombre de propriétés intéressantes. En particulier, en notant $\rightarrow^*$ pour la fermeture réflexive et transitive de $\rightarrow$:

Théorème des résidus. Si $M \rightarrow^* M1$ et $M \rightarrow^* M2$, alors il existe N tel que $M1 \rightarrow^* N$, $M2 \rightarrow^* N$, et pour tout N' tel que $M1 \rightarrow^* N'$ et $M2 \rightarrow^* N'$, on a $N \rightarrow^* N'$.

La première partie du théorème exprime la confluence de la relation $\rightarrow$. Nous verrons au Ch. III que ce théorème exprime une propriété catégorique sur les diagrammes de calcul, l'existence de sommes amalgamées. Ce théorème fondamental est appelé lemme des déplacements parallèles dans la terminologie traditionnelle du lambda-calcul.

Théorème de normalisation. Toute séquence de calculs issue d'un terme bien typé est finie.

Le point de vue logique sous-jacent aux termes de notre calcul est celui de la déduction naturelle de Gentzen. Le calcul correspond à l'élimination des coupures, qui est toujours possible par le théorème de normalisation, qui exprime que le calcul est une relation de simplification. En lambda-calcul, on parle de normalisation forte, la normalisation faible

étant la même proposition, mais avec une quantification existentielle : Tout terme bien typé possède une forme normale.

Les deux théorèmes ci-dessus ont pour corollaire :

Théorème de la forme canonique. Toute expression bien typée possède une forme normale unique, appelée sa forme canonique, que l'on peut atteindre en un temps fini par une séquence arbitraire de calculs.

Nous ne montrerons pas ici les théorèmes, qui exigent des développements techniques sortant du cadre de ces notes. Nous renvoyons le lecteur intéressé au livre de Barendregt et à la thèse de Lévy. Nous terminons par quelques remarques :

• **Attention**. Le calcul que nous avons présenté correspond au lambda-calcul avec β-réduction. On considère parfois une autre règle, la η-conversion :

$$[x:A](f\ x) = f.$$

Cette règle correspond (dans la traduction ci-dessus) à l'unicité de l'exponentiation **UE**. Nous pouvons donc en rendre compte également. Toutefois, la théorie des calculs correspondants est plus compliquée.

• Il est possible d'étendre notre langage de calcul avec plus de constructions, correspondant aux flèches primitives des catégories calculatoires. Par exemple, on peut introduire les projections fst et snd, ainsi que la paire (-,-) et la valeur nil, avec :

Nil :	E |- nil : 1
Fst :	Si E |- M : A&B, alors E |- fst(M) : A
Snd :	Si E |- M : A&B, alors E |- snd(M) : B
Paire :	Si E |- M : A et E |- N : B, alors E |- (M , N) : A&B

Il faut alors ajouter les règles de calcul :

$$fst(x,y) \rightarrow x$$
$$snd(x,y) \rightarrow y.$$

On obtient alors un lambda-calcul typé avec produit. Ce calcul "colle" mieux aux opérateurs catégoriques. En particulier, on remarque que maintenant l'abstraction [A]M a un sens pour tout type A, alors que sans

cette extension les abstractions sur des types produits étaient inutilisables en l'absence d'une règle d'introduction de produit.

Il est même possible d'autoriser des liaisons arborescentes, avec des abstractions sur des paires, du style [x:A , y:B]. La théorie syntaxique est à revoir, car les variables ne sont plus simplement des entiers, mais plutôt des occurrences d'arbres binaires, c'est-à-dire des mots sur l'alphabet {1,2}.

• On peut aussi ajouter des sommes, et des types primitifs, tels que Nat avec les primitives de calcul sur les entiers. La traduction des termes en flèches s'étend, dans une catégorie calculatoire avec sommes. On peut également autoriser des opérateurs de récursion, dans l'esprit du système **T** de Gödel.

• Il est possible également de rendre compte du lambda-calcul non-typé, en spécifiant l'existence d'un objet universel U.

On postule alors l'existence d'une paire de flèches Quote et Eval :

$$Quote : (U \Rightarrow U) \rightarrow U$$
$$Eval : U \rightarrow (U \Rightarrow U)$$

qui définissent une rétraction entre U et U⇒U :

Retract : Quote ; Eval = Id.

Un λ-terme non typé avec n variables libres est défini comme un λ-terme de type U dans un contexte U^n. On utilise la notation λx.M comme abréviation de [x:U] M. Nous pouvons maintenant traduire tout tel terme M, avec U^n |- M : U, en une flèche $G_n(M) : U^n \rightarrow U$:

$$G_n(k) = \pi_n(k)$$
$$G_n(\lambda x.M) = []\ G_{n+1}(M)$$
$$G_n((M\ N)) = \langle G_n(M) , G_n(N)\rangle;App$$

Exercice. Montrer que la règle β est toujours valide, mais que la règle η correspond maintenant à postuler que la rétraction est un isomorphisme, c'est-à-dire que Quote et Eval sont inverses, ce qui rajoute une équation.

Problème (Lawvere). Montrer que les deux dernières extensions sont incompatibles, dans le sens qu'une catégorie calculatoire avec objet universel admet une somme (ou de manière équivalente admet un objet initial) si et seulement si elle est isomorphe à la catégorie triviale 1.

Nous renvoyons le lecteur intéressé par ces compléments à l'article de Scott (Curry Volume, Academic Press 1980), ainsi qu'à la monographie de Curien (Pitman, 1985).

III - Compléments

1. Algèbre Universelle

Le langage catégorique est bien adapté à la présentation des résultats principaux de l'Algèbre Universelle.

1.1 Syntaxe : Termes et Dérivations

Soit Σ un alphabet gradué par une fonction d'arité, $\mathbf{T}(\Sigma,V)$ la Σ-algèbre libre engendrée par l'ensemble de générateurs (variables) V, $\mathbf{T}(\Sigma)$ l'ensemble des termes bien formés sur Σ : $\mathbf{T}(\Sigma)=\mathbf{T}(\Sigma,\emptyset)$. On considère un ensemble E d'équations M=N, avec M,N dans $\mathbf{T}(\Sigma,V)$. Il est pratique de considérer d'abord E comme un ensemble de simplifications orientées, déterminant un ensemble de flèches de réécriture $A \to B$ sur l'ensemble des termes $\mathbf{T}(\Sigma)$.

Soit $\mathbb{D}\mathbf{er}(\Sigma,E)$ la catégorie des dérivations dont les objets sont les termes et les flèches sont les séquences de dérivations, c'est à dire les simplifications étendues comme Σ-congruences. On peut alors considérer l'opérateur $F \in \Sigma$ d'arité n comme un foncteur de $\mathbb{D}\mathbf{er}(\Sigma,E)^n \to \mathbb{D}\mathbf{er}(\Sigma,E)$, dont la partie objet sert à construire les termes, et la partie flèche sert à exprimer que la simplification est une (semi) congruence vis à vis de F. Ceci s'étend aux termes par composition : un terme contenant n variables peut être vu comme un foncteur de même type. De même, on peut voir E comme un ensemble de transformations naturelles, la condition de naturalité exprimant la substitutivité de la simplification. Lorsque l'on ajoute la symétrie de ces équations, on obtient des isomorphismes naturels, entre foncteurs du groupoïde des preuves équationnelles.

1.2 Sémantique : Théories Algébriques

Considérons donnée une présentation (Σ,E). Pour un ensemble V quelconque, soit $\mathbf{T}_V = \mathbf{T}(\Sigma,V)/=_E$, où $=_E$ est la congruence d'égalité engendrée par E. On considère la catégorie $\mathbf{Clone}(\Sigma,E)$ dont les objets sont les ensembles et les flèches de $A \to B$ sont les fonctions de A vers $\mathbf{T}_B$,

étendues comme (Σ,E)-morphismes. L'identité Id_A est l'inclusion des générateurs de l'ensemble A dans T_A, la composition est la composition de fonctions. Les notions syntaxiques découlent comme des cas particuliers. Par exemple, pour un ensemble de variables formelles V donné, le monoïde des substitutions est l'ensemble des flèches (endomorphismes) de $V \to V$ muni de la composition ordinaire.

Différentes présentations (Σ,E) peuvent engendrer la même théorie. Catégoriquement, ce phénomène est caractérisé par un isomorphisme entre les catégories Σ-E-Alg correspondantes, ou de manière équivalente par un isomorphisme entre les catégories **Clone**(Σ,E).

De manière plus abstraite, on peut définir une théorie algébrique basée sur une catégorie **C** arbitraire par un triplet $\mathbf{T}=(T,I,O)$, où $T : C \to C$ est un foncteur, et où $I : Id \to T$ et $O : T^2 \to T$ sont des transformations naturelles vérifiant les équations :

$$(O;T);O = (T;O);O$$
$$(I;T);O = Id$$
$$(T;I);O = Id$$

Ces conditions assurent que I (resp. O) fournit une notion d'identité (resp. de composition) raisonable. La généralisation correspondante de la notion de clone est appelée catégorie de Kleisli associée à T.

Ces notions ont été développées par Godement (sous le nom de construction standard), puis par Lawvere, Beck, ... Nous renvoyons le lecteur intéressé à l'ouvrage de Barr et Wells pour approfondir ce sujet. Les triplets sont appelés "monads" par MacLane.

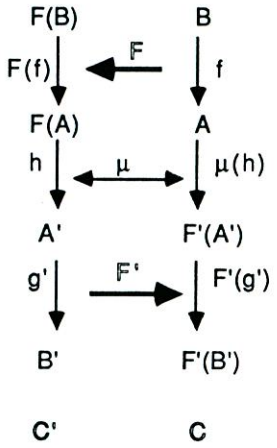
2. Adjonction

2.1 Définitions

Soit **C** et **C'** deux catégories. Une adjonction de **C** vers **C'**, notée

$$F : C \leftarrow \mu \rightarrow C' : F'$$

consiste en la donnée de deux foncteurs $F : C \to C'$ et $F' : C' \to C$, ainsi que pour toute paire d'objets $A : C$, $A' : C'$, d'une bijection μ entre $C'(F(A),A')$ et $C(A,F'(A'))$ qui vérifie les conditions de compatibilité suivantes :



$$\mu\text{-}F : \mu(F(f);h) = f;\mu(h)$$
$$\mu\text{-}F' : \mu(h);F'(g') = \mu(h;g')$$

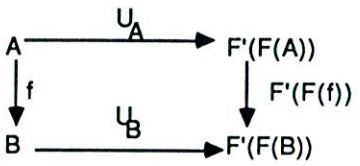
On peut remarquer qu'en notant μ' pour l'inverse de μ on peut remplacer μ-**F'** par une équation μ'-**F'** symétrique de μ-**F**. Réciproquement on peut remplacer μ-**F** par μ'-**F**, avec :

$$\mu'\text{-}F : F(f);\mu'(h') = \mu'(f;h')$$
$$\mu'\text{-}F' : \mu'(h';F'(g')) = \mu'(h');g'$$

On dit que F est adjoint à gauche de F', et symétriquement que F' est adjoint à droite de F. Pour tout objet A : **C** on définit U_A comme la flèche $\mu(Id_{F(A)}) : A \to F'(F(A))$.

Proposition. On a une transformation naturelle $U : I \to F;F'$, où I dénote le foncteur identité $\mathbf{Id_C}$.

Démonstration. Il faut vérifier la commutation du diagramme :



En effet, on a : $\mu(Id);F'(F(f)) = \mu(Id;F(f))$ par **μ-F'**
$= \mu(F(f);Id)$ par **Idl** et **Idr**
$= f;\mu(Id)$ par **μ-F**.

Par dualité, en définissant pour tout A' : **C'** la flèche

$$T_{A'} = \mu'(Id_{F'(A')}) : F(F'(A')) \to A'$$

on obtient une transformation naturelle $T : F';F \to I$. On appelle U l'unité et T la co-unité de l'adjonction considérée.

On remarque que μ est entièrement déterminée par U ou T, car **μ-F'** entraîne, pour tout $h : F(A) \to A'$:

$$\mu\text{-}\mathbf{U} : \mu(h) = U_A; F'(h)$$

Symétriquement, on obtient par μ'-F, pour tout $h' : A \to F'(A')$:

$$\mu'\text{-}\mathbf{T} : \mu'(h') = F(h');T_{A'}$$

Finalement, en faisant $h = T_{A'}$ dans **μ-U** on obtient :

$$\mu(T_{A'}) = U_{F'(A')};\ F'(T_{A'}) = Id_{F'(A')}$$

Et, en notant UF' la fonction qui associe à l'objet A' : **C'** la flèche $U_{F'(A')}$, et F'T celle qui associe à A' la flèche $F'(T_{A'})$, on obtient un isomorphisme naturel : $UF' : F' = F';F;F'$, avec $UF'^{-1} = F'T$. Dualement, on obtient aussi, avec des notations analogues : $FU : F = F;F';F$, avec $FU^{-1} = TF$.

2.2. Exemples

2.2.1. F' Foncteur d'oubli

• Par exemple,considérons **C = Set** et **C' = Grp**. F associe à l'ensemble X le groupe libre **F**(X) sur les générateurs X, alors que F' associe au groupe **G** son support G.

L'unité U est l'insertion des générateurs, avec $U_X : X \to F(X)$ qui injecte le générateur x:X en tant que constante du langage des mots du groupe libre sur X. Tout morphisme de groupe $h : \mathbf{F}(X) \to \mathbf{G}$ est caractérisé par son action μ(h) sur les générateurs : $\mu(h) : X \to G$. Réciproquement, toute interprétation $h' : X \to G$ s'étend de manière unique en un morphisme de groupe $\mu'(h') : \mathbf{F}(X) \to \mathbf{G}$.

Plus généralement, un tel schéma d'adjonction a la forme :

Libre : **Set** ← Interprétation → **Σ-E-Alg** : Oubli

• Dans le cas particulier où E = Ø, le foncteur F associe à l'ensemble V la Σ-algèbre libre sur V **T**(Σ,V) constituée des termes bien formés à partir des opérations Σ et des variables V. La Σ-algèbre initiale **T**(Σ) peut en particulier être définie comme F(Ø), pour F l'adjoint à gauche de Oubli(Σ).

• Un schéma analogue peut être défini pour un oubli "partiel" de structure. Par exemple, tout groupe Abélien peut être considéré comme un groupe par oubli de l'axiome **C** de commutativité :

Quotient : **Gr** ← Congruence → **Ab** : Oubli(**C**)

et là le foncteur F fait passer d'un groupe **G** à son quotient par commutateur **G/[G,G]**, l'unité de l'adjonction étant la projection sur le quotient $U(\mathbf{G}) : \mathbf{G} \to \mathbf{G/[G,G]}$.

De manière générale, un tel schéma d'adjonction a la forme :

Quotient : Σ-E'-Alg' $\leftarrow$ Congruence $\rightarrow$ Σ-E-Alg : Oubli(E-E')

Ces exemples sont caractéristiques de l'utilisation de l'adjonction comme moyen canonique d'ajouter de la structure.

2.2.2. Diagonal adjoint de Produit

On s'intéresse ici au cas $\mathbb{C}^{\circ}$ = **C&C**, lorsque **C** possède un produit. On prend pour F le foncteur diagonal Δ : **C** $\rightarrow$ **C&C**, et pour F' le foncteur produit & : $\mathbb{C}\&\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$. On prend $\mu(f,g) = \langle f,g \rangle$, et $\mu'(h) = (h;Fst\ ,\ h;Snd)$. On vérifie bien qu'on a une adjonction :

$$\Delta : \mathbf{C} \leftarrow \langle , \rangle \rightarrow \mathbf{C\&C} : \&$$

En effet, on a bien que μ et μ' sont inverses, c'est précisément ce que disent les équations **P1**, **P2** et **UP** de la théorie **Prod**. La condition μ-**F** correspond à la distributivité **DP**, et μ-**F'** se vérifie aisément.

L'unité de cette adjonction est donnée par le duplicateur :

$$D_A = \langle Id_A, Id_A \rangle : A \rightarrow A\&A$$

et la co-unité est la paire de projections :

$$P_{A,B} = (Fst,Snd) : A\&B \rightarrow A\ ,\ A\&B \rightarrow B.$$

Le duplicateur est ainsi nommé car pour toute flèche $f : A \rightarrow B$ de **C** on a :

$$f;D_B = \langle f,f \rangle.$$

2.2.3. Somme adjoint de Diagonal

De manière duale, si on prend pour F' le foncteur diagonal et F la somme, on a une adjonction :

$$+ : \mathbf{C+C} \leftarrow \Diamond \rightarrow \mathbf{C} : \Delta$$

dont l'unité est la paire d'injections $J_{A,B} = (Inl,Inr) : A+B \rightarrow A\ ,\ A+B \rightarrow B$, et la co-unité est le factorisateur $F_A = Id_A \Diamond Id_A$, ainsi nommé parce que pour tout $f : A \rightarrow B$ on a $F_A;f = f \Diamond f$.

2.2.4. Adjonctions triviales

On vient de voir que le foncteur diagonal admet comme adjoint à droite le produit et comme adjoint à gauche la somme. De façon analogue, le foncteur trivial $Nil : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{1}$ admet comme adjoint à gauche l'objet initial de **C** (s'il existe) et comme adjoint à droite l'objet terminal.

Exercice. Prouver qu'on a bien des adjonctions, en déterminant dans chaque cas μ, U et T.

On voit donc que l'adjonction est une manière générale de présenter des propriétés universelles, en remplaçant un diagramme a priori arbitraire par l'application d'un principe général de construction à un foncteur déjà connu. Par exemple, on vient de montrer que la compréhension des foncteurs élémentaires Nil et Δ permettait d'expliquer simplement les produits et coproduits finis. Nous allons maintenant voir que le foncteur d'exponentiation peut également être défini comme adjoint à droite du produit.

2.2.5. Produit adjoint de Exponentiation

Soit **C** une catégorie admettant un produit &, avec :

$$f \,\&\, g = \langle Fst;f\ ,\ Snd;g \rangle.$$

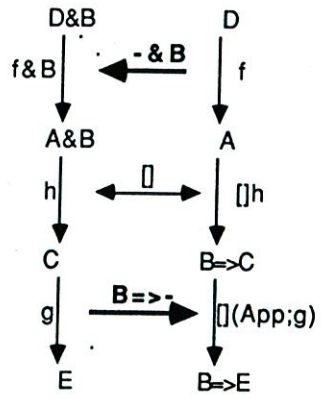
On postule l'abstraction comme une bijection :

$$[] : A \,\&\, B \rightarrow C = A \rightarrow B \Rightarrow C$$

et on définit l'application par :

$$App = []^{-1} Id_{A \Rightarrow B} : A \Rightarrow B \,\&\, B \rightarrow B.$$

Il est maintenant facile de reconnaître un diagramme d'adjonction :



Plus exactement, pour tout objet B : **C**, il existe une adjonction :

$$\mathbf{-\&B} : C \leftarrow [] \rightarrow C : \mathbf{B \Rightarrow -}$$

avec **f&B** = f&IdB et **B⇒g** = [](App;g),
ayant pour co-unité l'application :

$$T_C = App : B \Rightarrow C \,\&\, B \rightarrow C$$

et pour unité la Currifiée de l'identité produit :

$$U_A = []Id_{A\&B} : A \rightarrow B \Rightarrow (A \,\&\, B).$$

2.3. Adjonctions et Correspondances de Galois

Nous allons maintenant montrer que le concept d'adjonction est l'extension catégorique naturelle de la notion classique de correspondance de Galois.

2.3.1. Correspondance de Galois : le cas typique

Soit deux ensembles A et B, et une relation R dans AXB. A toute partie X de A, on associe la partie $R^*(X)$ de B qui contient tous les y tels que xRy pour tout x dans X. Symétriquement, à toute partie Y de B on associe la partie $R_*(Y)$ de A qui contient tous les x tels que xRy pour tout y dans Y. On a donc deux fonctions $R^* : P(A) \rightarrow P(B)$ et $R_* : P(B) \rightarrow P(A)$ qui vérifient (en

écrivant ≤ pour l'ordre d'inclusion) :

- décroissance :

$$\mathbf{Decr(R^*)} : X \leq X' \Rightarrow R^*(X') \leq R^*(X)$$
$$\mathbf{Decr(R_*)} : X \leq X' \Rightarrow R_*(X') \leq R_*(X)$$

- majoration :

$$\mathbf{I \leq (R^*;R_*)} : X \leq R_*(R^*(X))$$
$$\mathbf{I \leq (R_*;R^*)} : X \leq R^*(R_*(X))$$

Les équations $\mathbf{I \leq (R^*;R_*)}$ et $\mathbf{Decr(R^*)}$ impliquent $R^*(R_*(R^*(X))) \leq R^*(X)$, alors que $\mathbf{I \leq (R_*;R^*)}$ entraîne $R^*(X) \leq R^*(R_*(R^*(X)))$, d'où finalement :

$$\mathbf{R^*=R^*;R_*;R^*} : R^*(R_*(R^*(X))) = R^*(X)$$

et, par dualité :

$$\mathbf{R_*=R_*;R^*;R_*} : R_*(R^*(R_*(Y))) = R_*(Y)$$

Plus généralement, soit <**X**,≤> et <**Y**,≤> des ordres partiels, et $R^* : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{Y}$ et $R_* : \mathbf{Y} \rightarrow \mathbf{X}$ des fonctions vérifiant les axiomes de décroissance et majoration (et donc également les égalités ci-dessus, par antisymétrie), on dit que la paire $<R_*,R^*>$ établit une correspondance de Galois.

1.3.2. Exemples

Les correspondances de Galois ont d'abord été introduites pour étudier la théorie de Galois, comme leur nom l'indique. Indiquons deux exemples plus familiers :

- On se place dans le cas classique, avec A=B ensemble ordonné par un ordre ≤. Alors la correspondance qui fait correspondre à l'élément x : A l'ensemble $\leq_*(\leq^*(\{x\}))$ plonge A dans un treillis complet. Par exemple, avec A l'ensemble des rationnels, on retrouve la construction des Réels par la méthode des coupures de Dedekind.

- Considérons un système logique, par exemple dans une théorie de

premier ordre. Soit A l'ensemble des modèles, B celui des propositions, et prenons pour R la relation |= de validité. On vérifie qu'on a une correspondance de Galois. En particulier, pour tout ensemble P de propositions, $R^*(R_*(P))$ détermine la théorie de P.

2.3.3. Adjonctions dans les préordres

Considérons deux préordres **A** et **B**, et deux foncteurs : $\mathbf{R}^* : \mathbf{A} \to \mathbf{B}^\circ$ et $\mathbf{R}_* : \mathbf{B}^\circ \to \mathbf{A}$. Autrement dit, $\mathbf{R}^*$ et $\mathbf{R}_*$ sont deux fonctions décroissantes. Considérons, pour A : **A** et B : **B**, les flèches $h : \mathbf{R}_*(B) \to A$ et $h' : B \to \mathbf{R}^*(A)$. La flèche h (resp. h') est unique ou n'existe pas, suivant que l'inégalité respective est satisfaite ou non. On a donc une adjonction :

$$\mathbf{R}_* : \mathbf{B}^\circ \leftarrow \mu \rightarrow \mathbf{A} : \mathbf{R}^*$$

ssi pour tous A : **A** et B : **B**, la condition suivante est vérifiée :

$$A \leq \mathbf{R}_*(B) \Leftrightarrow B \leq \mathbf{R}^*(A).$$

Si elle l'est, la bijection μ est bien sûr unique. On obtient comme unité :

$$U_B : B \leq \mathbf{R}^*(\mathbf{R}_*(B))$$

et comme co-unité :

$$T_A : A \leq \mathbf{R}_*(\mathbf{R}^*(A))$$

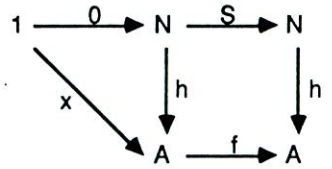
c'est-à-dire précisément les conditions $\mathbf{I} \leq (\mathbf{R}_* ; \mathbf{R}^*)$ et $\mathbf{I} \leq (\mathbf{R}^* ; \mathbf{R}_*)$. On a donc bien une correspondance de Galois, à ceci près que ≤ est un préordre peut-être non anti-symétrique. On n'obtient donc pas $\mathbf{R}^* = \mathbf{R}^* ; \mathbf{R}_* ; \mathbf{R}^*$ en général, mais seulement $R^*(X) \leq R^*(R_*(R^*(X))) \leq R^*(X)$ et de même pour la propriété duale. En conclusion :

L'adjonction est l'extension catégorique naturelle de la généralisation aux préordres de la correspondance de Galois.

3. Universalité

3.1. Objet naturel

Soit **C** une catégorie admettant un objet terminal 1 : **C**. On appelle objet naturel de **C** tout objet N : **C**, donné avec des flèches $0 : 1 \to N$ et $S : N \to N$, tels que pour tout A : C et tous $x : 1 \to A$, $f : A \to A$, il existe une flèche unique $h : N \to A$ faisant commuter le diagramme :



Autrement dit, en notant Rec(x,f) pour h, on a la théorie **Nat** :

$$N : \mathbf{C}$$
$$0 : N$$
$$S : N \to N$$
$$\mathrm{Rec} : 1 \to A , A \to A \mid\!- N \to\!> A$$
$$\mathbf{0Rec} : 0 ; \mathrm{Rec}(x,f) = x$$
$$\mathbf{SRec} : S ; \mathrm{Rec}(x,f) = \mathrm{Rec}(x,f) ; f$$
$$\mathbf{URec} : 0 ; h = x \ , \ S ; h = h ; f \mid\!- h = \mathrm{Rec}(x,f)$$

On remarque que la théorie n'est pas purement équationnelle, l'axiome d'unicité **URec** s'exprimant par une clause conditionnelle. Il est d'ailleurs normal que les constructeurs d'isomorphismes soient munis d'une arité, de même que les constructeurs de flèches et ceux d'objets.

Exercice. Montrer qu'un objet naturel est unique à isomorphisme près.

Exemple. Dans $1 \to \mathbf{Set}$, soit $\mathbb{N}$ le foncteur qui envoie Ø sur Ω, $\mathbb{0}$ la transformation naturelle telle que $\mathbf{0}_\emptyset$ sélectionne $0 : \Omega$, $\mathbb{S}$ la transformation naturelle telle que $\mathbf{S}_\emptyset$ est la fonction successeur $S : \Omega \to \Omega$. Pour tout foncteur $F : 1 \to \mathbf{Set}$, on prend pour Rec(x,f) la transformation naturelle $\mathbb{T} : \mathbb{N} \to F$ telle que $\mathbb{T}_\emptyset$ soit la fonction qui envoie l'élément n de Ω sur $f^n(x)$. On peut montrer que $\mathbb{N}$ est un objet naturel.

La définition d'objet naturel est la généralisation catégorique de l'ensemble des nombres naturels, et Rec(x,f) la généralisation correspondante de définition récursive.

Il est clair qu'il est facile de généraliser cette notion, relative à l'algèbre de Peano <A, 0:A , S:A→A>, à une algèbre quelconque, et donc de définir un objet naturel , et une opération de récursion, relativement à une structure arbitraire.

3.2. Limites

Nous allons ici définir une limite comme la généralisation de la notion d'objet terminal : un objet limite est un objet terminal relativement à une propriété exprimée par un diagramme commutant.

Soit **C** une catégorie quelconque, **D** un diagramme de **C**. On définit tout d'abord la notion de cône pour **D**, comme constitué d'un objet C : **C**, et pour chaque objet D du diagramme **D** d'une flèche $\mathbf{T}_D : C \to D$ de **C**, tels que pour toute flèche f : A → B de **D** on ait $\mathbf{T}_A;f = \mathbf{T}_B$. On écrit que **T** est un cône avec la notation : $\mathbf{T} : C \to \mathbf{D}$.
On peut justifier cette notation en remarquant que les cônes **T** sont les transformations naturelles entre les foncteurs **Const**(C) et **Injection**(**D**) : $\mathbf{D} \to \mathbf{C}$.

On définit maintenant la limite d'un diagramme **D** comme un cône **U** universel pour **D**. C'est-à-dire que $\mathbf{U} : A \to \mathbf{D}$, et pour tout cône $\mathbf{T} : B \to \mathbf{D}$ il existe une flèche unique h : B → A de **C** telle que $\mathbf{T}_D = h;\mathbf{U}_D$ pour tout D : **D**. On écrit : $\mathbf{U} : A \to_{lim} \mathbf{D}$.

Par dualité, on obtient aisément les notions de cocône et de colimite, comme généralisation d'une propriété d'initialité.

Les notions fondamentales de limite et de colimite vont nous permettre de retrouver comme cas particuliers les constructions universelles vues au Ch. II, et d'en définir de nouvelles de manière élégante.

3.3. Exemples

• Si **D** est le diagramme vide **Ø**, une limite $\mathbf{T} : 1 \to_{lim} \mathbf{Ø}$ définit 1 comme objet terminal.

• Si **D** est le diagramme sans flèches constitué de 2 objets A et B, une limite $\mathbf{P} : A\&B \to_{lim} \{A,B\}$ définit A&B comme produit de A et B, avec les deux projections Fst = $\mathbf{P}_A$ et Snd = $\mathbf{P}_B$. Tout D-cône $\mathbf{P'} : C \to \{A,B\}$, avec $f=\mathbf{P'}_A$ et $g=\mathbf{P'}_B$ détermine une flèche unique <f,g> : C → A&B.

• Les colimites des diagrammes correspondants déterminent respectivement un objet initial et une somme.

3.4. Noyaux

On considère le diagramme $\mathbf{D} = \{f,g : A \to B\}$ formé de deux flèches parallèles. Un **D**-cône est déterminé par un objet C et une flèche h : C → A qui égalise f et g, en faisant commuter le diagramme :

On appelle noyau de f et g une telle flèche limite, que l'on note Eg(f,g).

Exemples.

• Dans **Set**, soit E = {x | f(x) = g(x)}. L'inclusion I : E → A est un noyau de f et g.

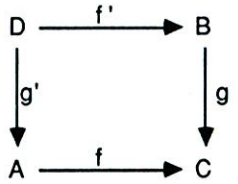
• Dans un ordre partiel, les noyaux sont les identités.

Exercice. Prouver que tout noyau est un mono, et que les noyaux épis sont des isos.

Par dualité, on obtient la notion de co-noyau, généralisation catégorique de la notion de structure quotient.

3.5. Produits fibrés et sommes amalgamées

On considère le diagramme **D** formé de deux flèches f : A → C, g : B → C ayant même codomaine. Un cône pour ce diagramme revient revient à trouver deux flèches f' : D → B, g' : D → A de même domaine telles que le carré ci dessous commute :



c'est-à-dire : f';g = g';f.
Un tel carré limite est appelé produit fibré des flèches f et g.

Exemples.

• Dans **Set**, on a un produit fibré de f et g avec D = {(x,y) | f(x) = g(y)}, f' = Fst, g' = Snd.

• Toujours dans **Set**, si g est une inclusion de C dans B, D = $f^{-1}(C)$ l'image inverse de C par f, f' : D → C la restriction de f à D, et g' l'inclusion de D dans A, on obtient un produit fibré.

• Dans **Mon**, soit f : **M** → **N** un homomorphisme de **M** vers **N**, **1** le monoïde trivial (qui est à la fois initial et terminal), g la flèche unique de **1** vers **N**, **K** le noyau de f, défini comme le sous-monoïde de **M** de support {x| f(x) = 1}. Alors on a un produit fibré, avec f' la flèche unique de **K** vers **1**, et g' l'inclusion de **K** dans **M**.

• Dans un préordre, l'existence de produits fibrés est une propriété d'inf

sous condition : deux éléments majorés admettent une borne inférieure.

• Dans toute catégorie ayant un objet terminal 1, en prenant C = 1, f = Nil_A et g = Nil_B, tout produit fibré de f et g détermine un produit A&B, avec les projections f' = Fst : A&B → A et g' = Snd : A&B → B.

Théorème. Si une catégorie admet un objet terminal et des produits fibrés, elle admet les produits finis et les noyaux.
Démonstration. A partir des deux derniers exemples.

On peut même montrer qu'une telle catégorie est finiment complète, dans le sens que tout diagramme fini admet une limite. Par exemple, **Set** est une catégorie finiment complète.

Finalement, on définit la somme amalgamée de f : A → B et g : A → C comme la colimite du diagramme formé de f et g.

Exercice.
Construire les exemples de sommes amalgamées duaux des exemples de produits fibrés ci-dessus.

Remarque terminologique. Les limites sont appelées parfois limites projectives ou limites inverses. De même on parle de limites inductives ou limites directes pour les colimites. Les noyaux sont traduits en anglais par equalizer, les produits fibrés (resp. sommes amalgamées) par pullback (resp. pushout).

Exercice.
Montrer que les foncteurs adjoints à droite préservent les limites, et dualement que les foncteurs adjoints à gauche préservent les colimites.

3.6. Application aux structures libres.

• On considère la Σ-algèbre libre **T**(Σ,V) engendrée par un ensemble de générateurs V. On munit l'ensemble de tels Σ-termes d'un préordre de

filtrage, défini par M≤N ssi il existe une substitution σ telle que σ(M) = N.

On peut montrer que deux termes admettent toujours une borne inférieure, et que lorsqu'ils admettent un majorant ils admettent une borne supérieure, instance commune la plus générale, calculable par l'algorithme d'unification. En fait, il est possible de raffiner ces résultats en se plaçant dans la catégorie **Subst**(Σ,V) qui a pour objets les (listes de) termes et pour flèches les substitutions.

Exercice. Montrer que **Subst**(Σ,V) admet des produits finis, et que les termes unifiables déterminent des sommes amalgamées.

• Un formalisme de calcul peut souvent s'exprimer de façon élégante en considérant la catégorie **Calc** ayant pour objets les termes à calculer (par exemple, un programme appliqué à ses données), et comme flèches de M vers N les différents calculs menant de M à N. Si les calculs peuvent se faire à l'intérieur d'un contexte, celà exprime que les constructeurs de termes sont des foncteurs. En général, les règles de calcul s'expriment comme des transformations naturelles. C'est le cas par exemple pour les calculs définis par des règles de simplification.

Si les calculs sont déterministes, on aura une propriété de confluence, exprimant que si M → M' et M → M", alors il existe N avec M' → N et M" → N. Très souvent cette propriété est obtenue par une propriété de projection de calculs co-initiaux, exprimant que certains calculs sont résidus d'autres. L'existence de résidus peut alors s'interpréter comme prouvant l'existence de sommes amalgamées dans **Calc**.

Exercice. Montrer que le théorème des résidus vu en II-4.5. exprime l'existence de sommes amalgamées dans une catégorie **Calc** appropriée.

4. Cohérence

4.1. Catégories monoïdales

Nous avons vu au paragraphe II.3.4. qu'une catégorie **C** admettant des produits finis possédait les isomorphismes naturels suivants :

Ass(&) : (A & B) & C = A & (B & C)
Idl(1,&) : 1 & A = A
Idr(1,&) : A & 1 = A

et que, de plus, ces isomorphismes vérifiaient la condition de compatibilité suivante.

Condition de cohérence. Pour tout A : **C**, et tout f : A → A formé par composition des isomorphismes ci-dessus et de leurs inverses :
f = Id.

On abstrait maintenant ces propriétés, en se plaçant dans une catégorie **C** arbitraire, vérifiant la théorie **Mon** obtenue en déclarant un objet distingué 1 : **C**, un bifoncteur & : **C** & **C** → **C**, les équations ci-dessus, et la condition de cohérence. Une telle catégorie est dite monoïdale.

Exemples.

• Toute catégorie admettant des produits finis est monoïdale.

• Si <M,&,1> est un monoïde, alors **Discr**(M) est une catégorie monoïdale. Pourtant, remarquez que 1 n'est pas objet terminal, si le monoïde n'est pas le monoïde trivial **1**.

4.2. Catégories algébroïdales

Il est aisé de généraliser cette abstraction à une théorie algébrique arbitraire, déclarant des foncteurs et des isomorphismes naturels

vérifiant la condition de cohérence. Par exemple, on obtient les catégories groupoïdales en ajoutant à **Mon** un foncteur inverse $^{-1}$, et des transformations naturelles :

$$\textbf{Invl} : A^{-1} \& A = 1$$
$$\textbf{Invr} : A \& A^{-1} = 1.$$

Il est possible de généraliser le point de vue logique développé au Ch. 2 aux catégories algébroïdales sur des algèbres de Heyting. Nous renvoyons au livre de Szabo pour cette application.

4.3. Confluence et cohérence

Mac Lane et Kelly ont étudié des conditions suffisantes de cohérence, qui postulent la commutation d'un petit nombre de diagrammes formés avec les isomorphismes naturels, ce qui entraîne la commutation de tous. Nous allons expliquer cette méthode dans un cadre général, en reliant ces conditions suffisantes de cohérence au théorème de Knuth-Bendix.

Rappel. On suppose le lecteur familier avec les notions de base de théories équationnelles, telles que la confluence et la confluence locale. Les équations de la théorie sont représentées par des règles de simplification orientées, qui possèdent la propriété de faire décroître à chaque application un ordre bien fondé. Toute séquence de simplifications s'arrête donc sur une forme normale. Dans ces conditions, le **lemme de Newman** montre l'équivalence entre les notions de confluence et confluence locale. D'autre part, **Knuth et Bendix** ont prouvé que la confluence locale est décidable pour les systèmes de simplifications, en montrant que cette condition découle d'un nombre fini de vérifications d'identité de formes normales, pour ce qu'il est convenu d'appeler les paires critiques. Ces paires critiques sont obtenues par superposition mutuelle des parties gauches des règles de simplification grâce à l'algorithme d'unification. Nous renvoyons pour les détails à la monographie "Equations and Rewrite Rules" de l'auteur.

L'application que nous allons faire ici de cette théorie concerne les équations données par les déclarations d'isomorphismes naturels. Les

règles de simplification correspondent donc aux transformations naturelles, dont nous oublions temporairement les inverses. L'idée fondamentale est d'étendre les propriétés de confluence des diagrammes à leur commutation. Ce qui est surprenant, c'est qu'en fait les preuves traditionnelles prouvent la généralisation catégorique sans aucune modification : l'assemblage d'un diagramme en sous-diagrammes confluents s'étend sans modification à l'assemblage du même diagramme en sous-diagrammes commutants. Il suffit de faire deux remarques : les propriétés de congruence des simplifications s'expriment par des propriétés de fonctorialité, et les propriétés de substitutivité s'expriment par des conditions de naturalité.

En fait, on peut considérer les résultats qui vont suivre comme la version intuitioniste des propriétés classiques correspondantes, où les preuves de commutation de diagrammes avaient été oubliées.

On se place dans une théorie telle que les transformations naturelles forment un système de simplifications. C'est-à-dire qu'il existe un ordre bien fondé > sur les expressions d'objets tel que pour toute transformation $T : A \to B$ de la présentation on ait $A>B$.

On appelle flèche simplifiante de longueur n une composition de n flèches de la forme F(f), où F est une expression dénotant un foncteur de la théorie, et f est obtenue en appliquant une transformation naturelle à des expressions d'objets de la théorie. Les seules flèches simplifiantes de longueur 0 sont les identités.

On appelle pré-diagramme une paire de deux flèches simplifiantes f et g de même origine : $(f : A \to B , g : A \to C)$, ce que nous notons :

$$\langle f , g \rangle : A \to B = C$$

Le pré-diagramme est dit local ssi f et g sont de longueur 1. Le pré-diagramme est dit commutable ssi on peut le prolonger par des flèches simplifiantes en un diagramme commutant, c'est-à-dire ssi il existe un objet D et des flèches simplifiantes $f' : B \to D$ et $g' : C \to D$ telles que $f;f' = g;g'$. Un système de simplifications est dit localement commutant ssi tout pré-diagramme local est commutable. Il est dit commutant ssi tout pré-diagramme est commutable.

Lemme de Newman, version catégorique. Tout système de simplifications localement commutant est commutant.

L'algorithme de superposition définit, pour tout système fini de simplifications, un nombre fini de pré-diagrammes locaux appelé paires critiques.

Théorème de Knuth et Bendix, version catégorique. Un système de simplifications est localement commutant si et seulement si toute paire critique est localement commutante.

Par exemple, la théorie **Mon** ci-dessus conduit aux 5 paires critiques suivantes (on indique explicitement les objets auxquels sont appliquées les simplifications) :

$<Ass_{A\&B,C,D} , Ass_{A,B,C}\&D>$: $((A\&B)\&C)\&D \rightarrow (A\&B)\&(C\&D) = A\&(B\&C))\&D$
$<Ass_{1,B,C} , Idl_B\&C>$

: $(1\&B)\&C \rightarrow 1\&(B\&C) = B\&C$
$<Ass_{A,1,C} , Idr_A\&C>$

: $(A\&1)\&C \rightarrow A\&(1\&C) = A\&C$
$<Ass_{A,B,1} , Idr_{A\&B}>$

: $(A\&B)\&1 \rightarrow A\&(B\&1) = A\&B$
$<Idl_1 , Idr_1>$

: $1\&1 \rightarrow 1 = 1$

Une condition suffisante pour que **Mon** soit commutante est que ces cinq diagrammes soient commutables. Par exemple, on peut postuler les équations suivantes, obtenues en écrivant la confluence des diagrammes :

Diag1 : $Ass_{A\&B,C,D};Ass_{A,B,C\&D} = Ass_{A,B,C}\&D;Ass_{A,B\&C,D};A\&Ass_{B,C,D}$
Diag2 : $Ass_{1,B,C};Idl_{B\&C} = Idl_B\&C$
Diag3 : $Ass_{A,1,C};A\&Idl_C = Idr_A\&C$
Diag4 : $Ass_{A,B,1};A\&Idr_B = Idr_{A\&B}$
Diag5 : $Idl_1 = Idr_1$

Exercice : Dessiner complètement les cinq diagrammes **Diag1** à **Diag5**.

4.4. Application : conditions de cohérence de Mac-Lane & Kelly.

Commençons par rappeler un corollaire de la confluence, la propriété de Church et Rosser :

Soit un système de simplifications commutant, et f : A = B un isomorphisme arbitraire de la théorie (utilisant éventuellement des simplifications inverses). Alors il existe un objet C et des flèches de simplification g : A → C et h : B → C telles que g = f ; h.

Il ne reste plus qu'à assembler toutes les propriétés ci-dessus.

Théorème de cohérence. Soit une théorie catégorique dont la présentation des isomorphismes forme un système de simplifications tel que les pré-diagrammes critiques soient commutables. Alors la théorie est cohérente.

Démonstration. Soit f : A → A une flèche formée par composition arbitraire d'isomorphismes et de leurs inverses. On montre que f = Id_A, par récurrence Nœthérienne sur A. En effet, par la propriété de Church et Rosser, il existe un objet B, et des simplifications g,h : A → B telles que g = f;h. Si A=B, alors nécessairement g=h=Id par définition de simplification. Sinon on a A>B, et par hypothèse de récurrence $h^{-1};g = Id_B$, d'où f;g=g, d'où f = Id_A puisque g est iso.

Exemple. La théorie **Prods** est cohérente relativement à la présentation d'isomorphismes donnée en II-3.4. En effet, il suffit de vérifier que les 5 équations **Diag1** à **Diag5** ci-dessus sont vérifiées dans la théorie.

Remarques.

• Mac Lane ne donne que les diagrammes **Diag1**, **Diag3** et **Diag5**. Ceux ci suffisent en effet à démontrer la cohérence (Exercice : le montrer. Ces diagrammes sont-ils indépendants?). Notre méthode exige les 5

diagrammes, car ils assurent non seulement que la théorie est cohérente, mais aussi qu'elle est commutante, ce qui est une propriété plus forte. De plus, notre méthode est complètement mécanisable. En effet, on obtient facilement les diagrammes à commuter en faisant la trace des vérifications de confluence des paires critiques de la théorie.

• Lorsque des isomorphismes sont symétriques, comme par exemple une loi de commutativité **Comm**(&) : A&B → B&A, la méthode peut se généraliser de façon similaire à la généralisation par Peterson et Stickel de la méthode de Knuth et Bendix. L'idée générale est de considérer **Ass** et **Comm** comme des isomorphismes, et de montrer que les autres transformations naturelles sont commutantes modulo ces isomorphismes. Par exemple, en ajoutant **Comm** à **Mon** (sans Idr qui devient superflu) on obtient une présentation des catégories monoïdales symétriques, qui est commutante ssi un petit nombre de diagrammes commutent, modulo les isomorphismes **Comm** et **Ass**.

Exercice : Ecrire ces diagrammes, et vérifier qu'ils commutent dans **Prods**, muni de l'isomorphisme supplémentaire :

<Snd,Fst> : A&B = B&A.

Par contre, il n'est plus vrai que tout isomorphisme f: A → A formé des isomorphismes et leurs inverses est une identité. Par exemple, dans A&A → A&A, on n'a pas <Snd,Fst> = Id; grosso-modo, on peut simplement postuler qu'une telle flèche est une permutation, c'est à dire peut être engendrée par les lois **Comm** et **Ass**. Une notion de cohérence plus restreinte peut être définie, en se limitant à des diagrammes dont les objets sont décrits par des termes linéaires, c'est-à-dire ne possédant pas plusieurs occurrences d'une même variable.

Pour en savoir plus

Ces "Catégories pour l'informaticien travailleur" sont issues d'une idée de G. Berry. Elles n'ont pas l'ambition de faire le tour complet de la Théorie des Catégories. Elles peuvent servir d'introduction, et de guide de lecture, à des ouvrages plus complets. Nous recommendons tout particulièrement le livre de H. Herrlich et G. Strecker "Category Theory", Allyn and Bacon, 1974, et celui de S. Mac Lane "Categories for the working mathematician", Springer-Verlag 1971. Les ouvrages en Français sur le sujet sont le livre de R. Godement "Théorie des faisceaux", Hermann, 1958, et celui de C. Ehresmann "Catégories et structures", Dunod, 1965. D'autres ouvrages sur le sujet sont M. A. Arbib & E. G. Manes "Arrows, Structures and Functors: The Categorical Imperative", Academic Press, 1965 (introductif) et B. Mitchell "Theory of Categories", Academic Press, 1965 (plus complet).

Pour l'application des catégories aux fondements de la Théorie des Ensembles nous renvoyons au livre de R. Goldblatt "Topoi, the categorial analysis of logic", North Holland, 1979 et au traité récent de M. Barr et C. Wells "Toposes, Triples and Theories", Springer-Verlag, 1985. Un ouvrage plus difficile est le traité de P. T. Johnstone "Topos Theory", L.M.S. Mathematical Monographs no. 10, Academic Press, 1977. Les rapports entre les catégories et la Théorie de la Démonstration sont traités (de manière hélas peu digeste) dans le livre de M.E. Szabo "Algebra of Proofs", North Holland, 1978.

La théorie du lambda calcul est traitée très complètement dans le livre de H. Barendregt "The Lambda Calculus, Its Syntax and Semantics", North Holland, 1981. Pour un ouvrage plus introductif, consulter le livre récent de R. Hindley et J. Seldin "Introduction to Combinators and λ-Calculus", London Mathematical Society Student Texts 1, Cambridge U. Press, 1986. La théorie syntaxique du lambda calcul est exposée magistralement dans la Thèse d'Etat de J.J. Lévy. Les rapports entre les catégories calculatoires et le lambda-calcul sont analysés dans la monographie de P.L. Curien, "Categorical Combinators, Sequential Algorithms and Functional Programming", Pitman, 1985, ainsi que dans le livre récent de J. Lambek et P. J. Scott "Introduction to Higher-Order Categorical Logic", Cambridge University Press 1986. Voir aussi les publications sur le sujet de D. Scott, G. Plotkin, G. Berry, J. Lambek, D. Koymans, S. Obtulowicz, A. Poigné, etc.

Nous remercions P.L. Curien, Y. Lafont et A. Forêt pour les judicieux conseils et corrections qui ont permis d'améliorer ces notes de cours.