Ensembles orthoptiques

Soit $\mathcal{C}$ une courbe plane de classe $\mathcal{C}^1$. On appelle *ensemble orthoptique de* $\mathcal{C}$ l'ensemble $\mathcal{O}$ des points M du plan de $\mathcal{C}$ par lesquels il passe deux droites orthogonales et tangentes à $\mathcal{C}$ (optiquement, $\mathcal{C}$ est vue depuis M sous un angle droit). Les faits suivants sont « bien connus » :

– *l'ensemble orthoptique d'une ellipse de demi-axes a et b est le cercle concentrique à l'ellipse, de rayon $\sqrt{a^2+b^2}$;*
– *l'ensemble orthoptique d'une hyperbole est non vide si et seulement si son excentricité est strictement inférieure à $\sqrt{2}$ et alors c'est un cercle concentrique à l'hyperbole ;*
– *l'ensemble orthoptique d'une parabole est sa directrice.*

L'objectif du TP est de démontrer ces propriétés par calcul formel et de les illustrer graphiquement.

1) Ellipse

On note $\mathcal{E}$ une ellipse d'équation cartésienne $f(x,y) = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ avec $a > 0$, $b > 0$.

a) Condition pour qu'une droite donnée soit tangente à $\mathcal{E}$

Soit $\mathcal{D}$ une droite d'équation cartésienne $ux + vy = w$ avec $(u,v) \neq (0,0)$. Elle est tangente à $\mathcal{E}$ si et seulement s'il existe x_0, y_0 réels tels que :

$$ux_0 + vy_0 = w, \qquad \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1, \qquad \begin{vmatrix} u & x_0/a^2 \\ v & y_0/b^2 \end{vmatrix} = 0.$$

La troisième condition exprime que le vecteur (u,v), normal à $\mathcal{D}$, est colinéaire à $\nabla f(x_0,y_0)$, normal à $\mathcal{E}$ en (x_0,y_0).

Entrer ces équations sous Maple et déterminer à quelle condition sur u, v, w elles ont une solution (x_0,y_0). On obtiendra deux solutions (w, x_0, y_0) en fonction de u, v ce qui est intuitivement évident (il existe exactement deux tangentes à $\mathcal{E}$ de direction donnée). Il est conseillé de résoudre d'abord les deux équations linéaires puis de substituer dans l'équation quadratique pour terminer la résolution.

b) Rectangles circonscrits à $\mathcal{E}$

Remarque : si deux droites orthogonales sont tangentes $\mathcal{E}$ alors les deux droites symétriques par rapport au centre O sont aussi tangentes et ces quatre droites déterminent un rectangle circonscrit à $\mathcal{E}$. Donc les points de l'ensemble orthoptique de $\mathcal{E}$ sont les sommets des rectangles circonscrits à $\mathcal{E}$.

Écrire une fonction `rectangle` prenant en paramètres les demi-axes a et b et un angle t et retournant le quintuplet $[A,B,C,D,A]$ tel que le rectangle $ABCD$ est circonscrit à $\mathcal{E}$ et la droite (AB) a pour angle polaire t. A,B,C,D seront représentés par des listes de deux coordonnées. Faire afficher sur un même dessin l'ellipse $\mathcal{E}$ et quelques rectangles circonscrits. Le dessin d'un rectangle est obtenu par `plot([`A,B,C,D,A`])`, A est répété en première et dernière position de façon à obtenir un contour fermé.

Vérifier (par calcul avec a, b, t formels) qu'un rectangle circonscrit à $\mathcal{E}$ est inscrit dans le cercle de centre O et de rayon $\sqrt{a^2+b^2}$. Ceci prouve que l'orthoptique de $\mathcal{E}$ est inclus dans ce cercle, l'inclusion réciproque est géométriquement évidente. mais pourrait être prouvée formellement par une méthode analogue à celle présentée à la section suivante dans le cas d'une hyperbole.

c) Lieu des points d'où l'on voit $\mathcal{E}$ sous un angle θ donné

Écrire une fonction `angle` prenant en paramètres a, b, θ, t et retournant un triplet $[B,A,C]$ tel que (AB) et (AC) sont tangentes à $\mathcal{E}$ en B et C, font entre elles un angle θ, et (AB) a pour angle polaire t. Représenter sur un même dessin $\mathcal{E}$, quelques dièdres $[B,A,C]$, et le lieu des points A. Ce lieu est-il un cercle pour $\theta \neq \pi/2$?

2) Hyperbole

On note $\mathcal{H}$ une hyperbole d'équation cartésienne $f(x,y) = \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ avec $a > 0$, $b > 0$.

a) Condition pour qu'une droite donnée soit tangente à $\mathcal{H}$

Chercher à quelle condition la droite $\mathcal{D}$ d'équation $ux + vy = w$ avec $(u,v) \neq (0,0)$ est tangente à $\mathcal{H}$ en (x_0, y_0) et déterminer, comme dans le cas de l'ellipse, w, x_0, y_0 en fonction de (u,v). Il n'existe pas de solution pour tout choix de (u,v), ceci était-il prévisible ?

b) Condition pour que deux tangentes orthogonales se coupent en un point donné

Soit M un point du plan de coordonnées (X,Y). Il passe en M deux tangentes orthogonales à $\mathcal{H}$ si et seulement s'il existe u, v non tous deux nuls tels que les droites d'équation :

$$(\mathcal{D}) \ : \ ux + vy = uX + vY, \qquad (\mathcal{D}') \ : \ -vx + uy = -vX + uY$$

soient tangentes à $\mathcal{H}$, ce qui donne deux équations en (u,v). Former ces équations et démontrer qu'elles ont une solution $(u,v) \neq (0,0)$ si et seulement si $X^2 + Y^2 = a^2 - b^2$. Il est ainsi prouvé que $\mathcal{H}$ a un orthoptique non vide si et seulement si $a > b$ (ce qui équivaut à $e < \sqrt{2}$ si e est l'excentricité de $\mathcal{H}$) et que dans ce cas l'orthoptique de $\mathcal{H}$ est un cercle de centre O comme annoncé.

c) Faire un dessin...

représentant $\mathcal{H}$, quelques angles droits circonscrits à $\mathcal{H}$ et le cercle orthoptique.

3) Parabole

On note $\mathcal{P}$ une parabole d'équation cartésienne $y^2 = 2px$ avec $p > 0$. Déterminer l'ensemble orthoptique de $\mathcal{P}$ par une méthode de votre choix. Si ABC est un triangle rectangle tangent à $\mathcal{P}$ en B et C que peut-on dire (et prouver) sur le segment $[B,C]$?

4) Prolongement

Étudier le lieu des points où deux normales à une ellipse se coupent avec un angle donné.