Algorithme de Boyer-Moore (ENS 2002)[1]

On s'intéresse au problème de la recherche de la première occurrence d'un motif $x = x[0\,..\,m-1]$ dans un mot $y = y[0\,..\,n-1]$. Pour cela, on peut appliquer l'algorithme naïf suivant qui déplace le motif de gauche à droite le long du mot et qui, pour chaque position du motif, teste s'il coïncide avec le facteur correspondant de y en comparant les lettres du motif et du facteur de droite à gauche.

```
1  soit Recherche_naïve(x, y) =
2      soit j ← m − 1 dans
3      tant que j < n faire
4          i ← m − 1
5          tant que i ⩾ 0 et x[i] = y[j − m + 1 + i] faire i ← i − 1
6          si i < 0 alors renvoyer j − m + 1 (* x = y[j − m + 1 .. j] *)
7          j ← j + 1
8      échouer (* le motif n'apparaît pas *)
```

1. Heuristique du mauvais caractère

Donner une méthode de calcul, à partir du motif x, d'un tableau mc qui associe un entier à toute lettre ℓ de manière que l'on puisse remplacer la ligne 7 de l'algorithme naïf par l'instruction suivante:

$$j \leftarrow j + \max(1, i - mc[y[j - m + 1 + i]])$$

2. Heuristique du bon suffixe

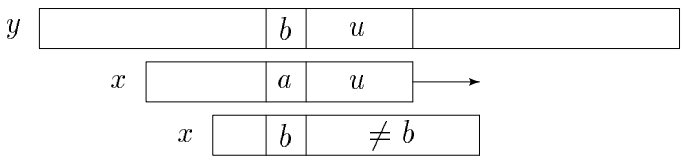
Donner la définition d'un tableau $bs[0\,..\,m-1]$, calculable à partir de x, tel que l'on puisse remplacer avantageusement la ligne 7 de l'algorithme naïf par

$$j \leftarrow j + \max(bs[i], i - mc[y[j - m + 1 + i]])$$

3. *Donner un algorithme en $O(m)$ qui renvoie la* table du bon suffixe *bs. On pourra commencer par calculer la* table des suffixes *$s[0\,..\,m-1]$ définie par $s[i]$ = la longueur du plus long suffixe commun à x et $x[0\,..\,i]$.*

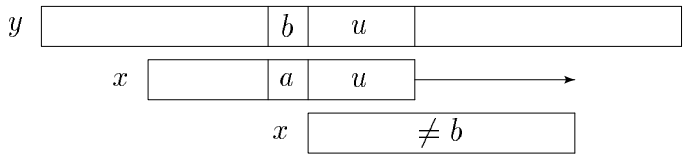
Corrigé

1. Dans l'algorithme naïf, l'instruction $j \leftarrow j + 1$ de la ligne 7 effectue un décalage d'une unité du motif vers la droite quand la lettre $a = x[i]$ diffère de $b = y[j - m + 1 + i]$ (le *mauvais caractère*). Or si l'occurrence la plus à droite de la lettre b dans x se trouve à gauche de $a = x[i]$: $b = x[i']$ avec $i' < i$, on peut effectuer un décalage de x de $i - i'$ caractères sans risquer de perdre une occurrence de x dans y. Dans la figure suivante, la flèche symbolise ce décalage.



1. D'après M. Crochemore, C. Hancart, T. Lecroq. *Algorithmique du texte*. Vuibert, 2001.

Si la lettre b n'apparaît pas dans le motif, un décalage autorisé est $i+1$:



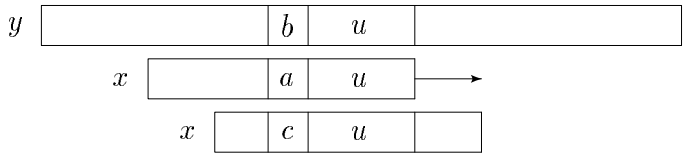
Finalement, on pourra remplacer la ligne 7 par celle indiquée à condition de définir le tableau mc par

$$mc[\ell] = \begin{cases} \max\{i \mid x[i] = \ell\} & \text{si } \ell \text{ apparaît dans } x \\ -1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

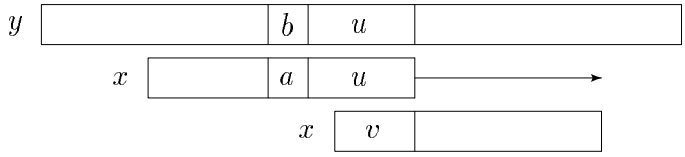
Le code suivant construit mc.

1 **pour** chaque lettre ℓ **faire** $mc[\ell] \leftarrow -1$
2 **pour** $i \leftarrow 0$ **à** $m-1$ **faire** $mc[x[i]] \leftarrow i$

2. Reprenons la situation de la question précédente dans laquelle $u = x[i+1\,..\,m-1] = y[j-m+2+i\,..\,j]$ et $a = x[i] \neq b = y[j-m+1+i]$. Soit d une valeur du décalage à droite du motif pour laquelle il y a coïncidence du motif et du facteur de y correspondant. Si $d \leqslant i$, alors $u = x[i+1\,..\,m-1] = x[i+1-d\,..\,m-1-d]$ et $a = x[i] \neq x[i-d]$:



Si $i < d < m$, alors le préfixe $v = x[0\,..\,m-1-d]$ de x est aussi suffixe de x:



On définit donc $bs[i]$ comme le plus petit des *i-décalages* où on appelle i-décalage un entier d tel que

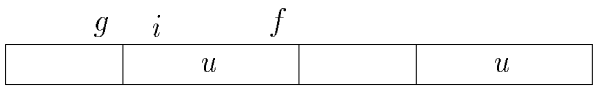
ou bien $1 \leqslant d \leqslant i$, $x[i+1\,..\,m-1] = x[i+1-d\,..\,m-1-d]$ et $x[i] \neq x[i-d]$;
ou bien $i < d \leqslant m$ et $x[d\,..\,m-1] = x[0\,..\,m-1-d]$.

3. On donne d'abord un algorithme de calcul de la table des suffixes s.

$s[m-1] = m$ puis on calcule $s[i]$, pour $i = m-2, m-3, \ldots, 0$ en introduisant deux variables f et g auxquelles on impose, pour $i = m-2, m-3, \ldots, 0$ mais pas pour $i = m-1$, l'invariant suivant:

$$i \leqslant f \leqslant m-2$$
$$g = f - s[f]$$
$$g \text{ est minimum.}$$

Noter que, au départ, f n'est pas définie et on donne à g la valeur $m-1$ afin que la condition $i > g$ soit fausse dans le corps de la boucle.



```
1   soit Table_des_suffixes(x) =
2       g ← m − 1
3       s[m − 1] ← m
4       pour i ← m − 2 décroissant à 0 faire
5           si i > g et s[i + m − 1 − f] < i − g alors
6               s[i] ← s[i + m − 1 − f]
7           sinon
8               g ← min(g, i)
9               f ← i
10              tant que g ⩾ 0 et x[g] = x[g + m − 1 − f] faire g ← g − 1
11              s[i] ← f − g
12      renvoyer s
```

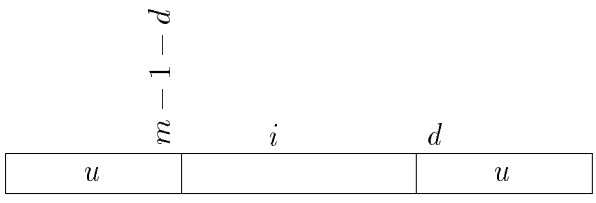
La complexité est bien $O(m)$ car g est décrémenté dans le corps de la boucle de la ligne 10.

On propose l'algorithme suivant pour calculer la table du bon suffixe:

```
1   soit Table_du_bon_suffixe(x, s) =
2       i ← 0
3       pour d = 1 à m faire
4           si d = m ou s[m − 1 − d] = m − d alors
5               tant que i < d faire
6                   bs[i] ← d
7                   i ← i + 1
8       pour d ← m − 1 décroissant à 1 faire
9           bs[m − 1 − s[m − 1 − d]] ← d
10      renvoyer bs
```

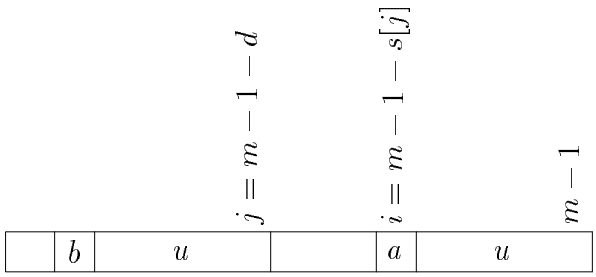
Dans une première étape, lignes 2 à 7, on donne à $bs[i]$ la valeur du plus petit i-décalage $>$ à i. On remarque pour cela qu'un entier $d > i$ est un tel décalage ssi il vérifie la condition suivante:

$$d = m \text{ ou } (d < m \text{ et } s[m-1-d] = m-d)$$



Soit donc $1 \leqslant d_1 < \cdots < d_p = m$ l'ensemble des d vérifiant cette condition; alors, si $d_{k-1} \leqslant i < d_k$ (on convient $d_0 = 0$), le plus petit i-décalage $>$ à i est d_k.

Il reste, dans une deuxième étape, lignes 8 et 9, à mettre à jour $bs[i]$ dans le cas où il existe un i-décalage $d \leqslant i$. Dans ce cas, $i = m - 1 - s[j]$ où $j = m - 1 - d$. A toute valeur de d correspond donc un unique i et il suffit de parcourir les valeurs possibles de d en ordre décroissant pour être assuré que chaque $bs[i]$ se verra affecté du d minimum.



En fait $d = i + 1$ pour les valeurs de d telles que $s[j] = j + 1$ et, dans ce cas, l'affectation $bs[i] \leftarrow d$ n'a pas d'effet car $bs[i]$ a déjà la valeur $i + 1$ d'après la première étape.

L'algorithme est en $O(m)$ car i augmente dans le corps de la boucle des lignes 5 à 7.

On peut montrer que l'algorithme de Boyer-Moore est $O(n)$.