Tas de sable (ENS Lyon Math-info 99)

On appelle *configuration* une matrice M de dimensions $p \times q$ à coefficients entiers naturels. Si un élément $m_{i,j}$ est $\geqslant 4$, on peut lui retrancher 4 et ajouter 1 à chacun de ses voisins immédiats (les éléments $m_{i-1,j}$ si $i \neq 1$, $m_{i+1,j}$ si $i \neq p$, $m_{i,j-1}$ si $j \neq 1$ et $m_{i,j+1}$ si $j \neq q$). Si M' est le résultat de cette transformation, on écrit $M \to M'$ ou, plus précisément, $M \xrightarrow{i,j} M'$.

1. *Montrer que la relation $\to$ termine; autrement dit, quelle que soit la configuration de départ et la suite de transformations effectuées, on arrive à une configuration bloquée dans laquelle aucun élément n'est $\geqslant 4$.*

2. *Peut-on avoir deux configurations bloquées distinctes à partir d'une même configuration de départ M?*

3. *Mêmes questions avec des configurations sans bord (matrices « infinies »).*

Corrigé

1. (D'après Bruno Petazzoni) Pour une configuration donnée, on note

$$h(M) = \sum_{i,j} m_{i,j} \text{ et } w(M) = \sum_{i,j} (i+j-2)^2 m_{i,j}.$$

Pour une transformation $M \to M'$ sur un site (i,j) non périphérique ($1 < i < p$, $1 < j < q$), on a

$h(M') = h(M)$ et $w(M') - w(M) = 2(i+j-3)^2 + 2(i+j-1)^2 - 4(i+j-2)^2 = 4$.

Donc, si $M^{(0)} \to \cdots \to M^{(n)}$ est une suite de transformations non périphériques, alors

$$4n \leqslant w(M^{(n)}) = \sum_{i,j} (i+j-2)^2 m^{(n)}_{i,j} \leqslant (p+q-2)^2 h(M^{(n)}) = (p+q-2)^2 h(M^{(0)}).$$

Partant de M une suite de $\left\lfloor \frac{1}{4}(p+q-2)^2 h(M) \right\rfloor + 1$ transformations consécutives contient au moins une transformation périphérique qui diminue d'au moins 1 la quantité $h(M)$. Au total, une telle suite issue de M contient donc au plus $h(M) \left(\left\lfloor \frac{1}{4}(p+q-2)^2 h(M) \right\rfloor + 1 \right)$ transformations.

2. Non. Comme $\to$ termine, on peut démontrer ce résultat en supposant qu'il est vrai pour toutes les configurations M' telles que $M \to M'$: Soient $M \xrightarrow{*} M_1$ et $M \xrightarrow{*} M_2$ deux suite de transformations avec M_1 et M_2 bloquées. Si M n'est pas bloquée, il existe un couple (i,j) tel que $m_{i,j} \geqslant 4$. Pour $k = 1, 2$, l'une au moins des transformations $M \xrightarrow{*} M_k$ est la transformation (i,j). Or, comme une transformation équivaut à ajouter à la matrice une autre matrice (une transformation est une translation), les transformations commutent et on a donc $M \xrightarrow{i,j} M' \xrightarrow{*} M_k$. En appliquant l'hypothèse à M', on obtient $M_1 = M_2$.

3. Les résultats précédents sont encore valables.

Montrons d'abord la terminaison dans le cas où la configuration initiale est un carré d'éléments tous égaux. Plus précisément, $m_{i,j} = t$ pour $|i| \leqslant p$ et $|j| \leqslant p$ et $m_{i,j} = 0$ pour les autres $(i,j) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$; où $p, t \in \mathbf{N}^*$. Soit $M = M^{(0)} \to M^{(1)} \to \cdots$ est une suite infinie de transformations. Pour tout entier N, d'après la question 1, il existe un rang K pour lequel les éléments $\geqslant 4$

de $M^{(K)}$ sont en dehors du carré $|i|, |j| \leqslant N$. Mais on voit par récurrence que, pour tout k, d'une part il existe au moins un élément non nul de $M^{(k)}$ dans chacun des quatre quadrants du plan, et d'autre part les éléments non nuls de $M^{(k)}$ forment un ensemble connexe (en un sens évident). Ainsi, si $m_{i_0,j_0}^{(K)} \geqslant 4$ et si $m_{i_1,j_1}^{(K)} \neq 0$ où (i_1, j_1) se trouve dans le quadrant oppposé à celui de (i_0, j_0), il existe un chemin de (i_0, j_0) à (i_1, j_1) formé d'éléments non nuls de $M^{(K)}$ et, par conséquent, $h(M) = h(M^{(K)}) \geqslant N$: il suffit donc de choisir $N > h(M)$ pour obtenir une contradiction.

Dans le cas d'une configuration M quelconque, il suffit de considérer une configuration du type précédent $\geqslant$ à M.

Le fait qu'une configuration n'a qu'un seul réduit se déduit alors du cas borné.