Problème lié au génôme (ENS Cachan)

Soit X un alphabet. On dit qu'un mot $u \in X^*$ *se recombine* en $v \in X^*$, ce que l'on note $u\,\mathcal{R}\,v$, si $u = v$ sauf éventuellement un facteur de u à l'envers dans v.

1. *Formaliser la définition de* $\mathcal{R}$.

2. *Montrer que* $\forall u, v \in X^*$, $\forall x \in X$, $u\,\mathcal{R}\,v \Leftrightarrow xu\,\mathcal{R}\,xv$.

3. *Donner un algorithme indiquant si* $u\,\mathcal{R}\,v$. *Complexité?*

4. Si L est un langage, on pose $L^{\mathcal{R}} = \{v \in X^* \mid \exists u \in L : u\,\mathcal{R}\,v\}$.
Peut-on dire que $L^{\mathcal{R}}$ *est reconnaissable dés que* L *est reconnaissable?.*

Corrigé

1. $u = u_1 \dots u_n\,\mathcal{R}\,v = v_1 \dots v_m$ ssi
ou $u = v$, ou $n = m$ et il existe $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n$ tels que

$$\forall k = 1, \dots, n,\; u_k = \begin{cases} v_{i+j-k} & \text{si } i \leqslant k \leqslant j \\ v_k & \text{sinon.} \end{cases}$$

2. $\Leftarrow$ est évident. Réciproquement, si $xu\,\mathcal{R}\,xv$ et si le facteur de xu à l'envers dans xv est $xu_1 \dots u_p$, $p \geqslant 1$ (autres cas évidents), alors $v_p \dots v_1 x = xu_1 \dots u_p$; donc $v_p = x = u_p$ et $u = v$ sauf le facteur $u_1 \dots u_{p-1}$ à l'envers dans v.

3. Tant que la première (resp. la dernière) lettre de u coïncide avec la première (resp. dernière) lettre de v, on supprime de u et de v cette lettre; il reste alors à vérifier que v est le miroir de u. Cet algorithme est linéaire.

4. Oui: si $\mathcal{A} = (Q, I, F, \Delta)$ est un automate reconnaissant L, alors

$$L^{\mathcal{R}} = \sum_{p,q \in Q} I^{-1} p \widetilde{(p^{-1} q)} q^{-1} F$$

où $\widetilde{M}$ désigne le langage miroir du langage M.