Décomposition en nombres de Fibonacci (ENS)

F est la suite de Fibonacci définie par $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.

Montrer que tout entier $n \geqslant 0$ peut s'écrire de façon unique sous la forme $n = \sum_{i=1}^{r} F_{e_i}$, où $e_i - e_{i+1} > 1$ et $e_i \geqslant 2$.

Corrigé

Montrons d'abord par récurrence sur r que, pour toute décomposition $n = \sum_{i=1}^{r} F_{e_i}$, on a $n < F_{e_1+1}$. Si $r = 1$, c'est clair; et si on suppose le résultat pour $r - 1$, alors $n < F_{e_1} + F_{e_2+1} \leqslant F_{e_1} + F_{e_1-1} = F_{e_1+1}$.

On démontre par récurrence sur p que tout entier $<$ à F_p admet une unique décomposition de la forme indiquée. Pour $p \leqslant 4$ c'est facile. Si le résultat est vérifié pour p, soit $n \in [F_p, F_{p+1}[$: $n = F_p + m$ où $0 \leqslant m < F_{p+1} - F_p = F_{p-1}$. D'après l'hypothèse de récurrence, m admet une unique décomposition $m = \sum_{i=1}^{r} F_{e_i}$. Les e_i sont alors nécessairement $< p-1$ donc $n = F_p + \sum_{i=1}^{r} F_{e_i}$ est une décomposition de n. Pour vérifier l'unicité, soit $n = \sum_{i=1}^{s} F_{e'_i}$ une décomposition de n. Nécessairement, $e'_1 = p$ (car sinon $e'_1 < p$ et donc $n < F_{e'_1+1} \leqslant F_p$) et $\sum_{i=2}^{s} F_{e'_i}$ est donc la décomposition de m.