

## Confluence (ENS Lyon, Maths-Info)

On s'intéresse aux mots non vides constitués uniquement des lettres  $B$  et  $N$ . On définit sur ces mots la relation  $X\mathcal{R}Y$  si et seulement si le mot  $Y$  s'obtient en remplaçant dans le mot  $X$  une séquence  $BN$  par  $N$ , ou  $NB$  par  $N$ , ou  $BB$  par  $B$ , ou  $NN$  par  $B$ .

1. Montrer que toute suite telle que  $X_n\mathcal{R}X_{n+1}$  termine.
2. Montrer que toutes les suites commençant par un même mot  $X_0$  terminent sur le même mot.

On se propose de généraliser ce résultat.  $\rightarrow$  est une relation binaire sur un ensemble  $\mathcal{X}$ ; on note  $\overset{*}{\rightarrow}$  la fermeture réflexive et transitive de  $\rightarrow$ . On donne les définitions suivantes:

$\rightarrow$  termine si il n'existe pas de suite  $(x_n)_{n \geq 0}$  telle que  $\forall n \in \mathbf{N}, x_n \rightarrow x_{n+1}$ .

$\rightarrow$  est localement confluente si

$$\forall x, y_1, y_2 \in \mathcal{X}, (x \rightarrow y_1 \text{ et } x \rightarrow y_2) \Rightarrow \exists z \in \mathcal{X}, y_1 \overset{*}{\rightarrow} z \text{ et } y_2 \overset{*}{\rightarrow} z.$$

$\rightarrow$  est globalement confluente si

$$\forall x, y_1, y_2 \in \mathcal{X}, (x \overset{*}{\rightarrow} y_1 \text{ et } x \overset{*}{\rightarrow} y_2) \Rightarrow \exists z \in \mathcal{X}, y_1 \overset{*}{\rightarrow} z \text{ et } y_2 \overset{*}{\rightarrow} z.$$

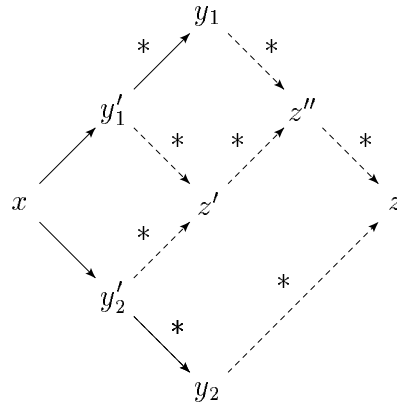
3. Montrer que si la relation  $\rightarrow$  termine et est localement confluente, alors elle est globalement confluente.
4. Montrer que la relation  $\mathcal{R}$  est globalement confluente.
5. Montrer que, sans la terminaison, la confluence locale n'implique pas la confluence globale.

### Corrigé

1. La longueur du mot  $X_n$  décroît strictement.
2. Si  $G = \{b, n\}$  est le groupe à deux éléments ( $b$  neutre,  $nn = b$ ), soit  $x$  l'élément de  $G$  obtenu en remplaçant  $B$  par  $b$  et  $N$  par  $n$  dans le mot  $X_0$ . Si  $x = b$  (resp.  $n$ ), alors toute suite commençant par  $X_0$  termine sur  $B$  (resp.  $N$ ).
3. Notons  $P(x)$  la propriété

$$\forall y_1, y_2 \in \mathcal{X}, (x \overset{*}{\rightarrow} y_1 \text{ et } x \overset{*}{\rightarrow} y_2) \Rightarrow \exists z \in \mathcal{X}, y_1 \overset{*}{\rightarrow} z \text{ et } y_2 \overset{*}{\rightarrow} z.$$

Supposons que  $P(y)$  soit vraie pour tous les  $y$  tels que  $x \overset{+}{\rightarrow} y$  et montrons  $P(x)$  ( $\overset{+}{\rightarrow}$  est la fermeture transitive de  $\rightarrow$ ): Soient donc  $y_1$  et  $y_2$  tels que  $x \overset{*}{\rightarrow} y_1$  et  $x \overset{*}{\rightarrow} y_2$ . Si  $y_1 = x$  ou si  $y_2 = x$ , l'existence de  $z$  est immédiate. Sinon, il existe  $y'_1$  et  $y'_2$  tels que  $x \rightarrow y'_1 \overset{*}{\rightarrow} y_1$  et  $x \rightarrow y'_2 \overset{*}{\rightarrow} y_2$ . Comme  $\rightarrow$  est localement confluente, il existe  $z'$  vérifiant  $y'_1 \overset{*}{\rightarrow} z'$  et  $y'_2 \overset{*}{\rightarrow} z'$ . Par hypothèse, il existe alors  $z''$  tel que  $y_1 \overset{*}{\rightarrow} z''$  et  $z' \overset{*}{\rightarrow} z''$ ; puis  $z$  tel que  $z'' \overset{*}{\rightarrow} z$  et  $y_2 \overset{*}{\rightarrow} z$ .  $P(x)$  est bien démontré.



Ce résultat montre que  $P(x)$  est vérifiée pour tout  $x$  car s'il existe un  $x_0$  ne vérifiant pas  $P(x_0)$ , on peut trouver un  $x_1$  ne vérifiant pas  $P(x_1)$  et tel que  $x_0 \xrightarrow{+} x_1$  puis un  $x_2$  ne vérifiant pas  $P(x_2)$  et tel que  $x_1 \xrightarrow{+} x_2$  et ainsi de suite; on contredit ainsi la terminaison.

4. Conséquence de la question 2.

5. Contre-exemple:  $\mathcal{X} = \{y, z, x_0, x_1, x_2, \dots\}$ ,  $x_0 \rightarrow x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow \dots, x_{2n} \rightarrow y$  et  $x_{2n+1} \rightarrow z$ .