Confluence (ENS Lyon, Maths-Info)

On s'intéresse aux mots non vides constitués uniquement des lettres B et N. On définit sur ces mots la relation $X\mathcal{R}Y$ si et seulement si le mot Y s'obtient en remplaçant dans le mot X une séquence BN par N, ou NB par N, ou BB par B, ou NN par B

1. *Montrer que toute suite telle que $X_n\mathcal{R}X_{n+1}$ termine.*

2. *Montrer que toutes les suites commençant par un même mot X_0 terminent sur le même mot.*

On se propose de généraliser ce résultat. $\rightarrow$ est une relation binaire sur un ensemble $\mathcal{X}$; on note $\xrightarrow{*}$ la fermeture réflexive et transitive de $\rightarrow$. On donne les définitions suivantes:

$\rightarrow$ *termine* si il n'existe pas de suite $(x_n)_{n\geqslant 0}$ telle que $\forall n \in \mathbf{N}$, $x_n \rightarrow x_{n+1}$.

$\rightarrow$ est *localement confluente* si

$$\forall x, y_1, y_2 \in \mathcal{X},\ (x \rightarrow y_1 \text{ et } x \rightarrow y_2) \Rightarrow \exists z \in \mathcal{X},\ y_1 \xrightarrow{*} z \text{ et } y_2 \xrightarrow{*} z.$$

$\rightarrow$ est *globalement confluente* si

$$\forall x, y_1, y_2 \in \mathcal{X},\ (x \xrightarrow{*} y_1 \text{ et } x \xrightarrow{*} y_2) \Rightarrow \exists z \in \mathcal{X},\ y_1 \xrightarrow{*} z \text{ et } y_2 \xrightarrow{*} z.$$

3. *Montrer que si la relation $\rightarrow$ termine et est localement confluente, alors elle est globalement confluente.*

4. *Montrer que la relation $\mathcal{R}$ est globalement confluente.*

5. *Montrer que, sans la terminaison, la confluence locale n'implique pas la confluence globale.*

Corrigé

1. La longueur du mot X_n décroît strictement.

2. Si $G = \{b, n\}$ est le groupe à deux éléments (b neutre, $nn = b$), soit x l'élément de G obtenu en remplaçant B par b et N par n dans le mot X_0. Si $x = b$ (resp. n), alors toute suite commençant par X_0 termine sur B (resp. N).

3. Notons $P(x)$ la propriété

$$\forall y_1, y_2 \in \mathcal{X},\ (x \xrightarrow{*} y_1 \text{ et } x \xrightarrow{*} y_2) \Rightarrow \exists z \in \mathcal{X},\ y_1 \xrightarrow{*} z \text{ et } y_2 \xrightarrow{*} z.$$

Supposons que $P(y)$ soit vraie pour tous les y tels que $x \xrightarrow{+} y$ et montrons $P(x)$ ($\xrightarrow{+}$ est la fermeture transitive de $\rightarrow$): Soient donc y_1 et y_2 tels que $x \xrightarrow{*} y_1$ et $x \xrightarrow{*} y_2$. Si $y_1 = x$ ou si $y_2 = x$, l'existence de z est immédiate. Sinon, il existe y_1' et y_2' tels que $x \rightarrow y_1' \xrightarrow{*} y_1$ et $x \rightarrow y_2' \xrightarrow{*} y_2$. Comme $\rightarrow$ est localement confluente, il existe z' vérifiant $y_1' \xrightarrow{*} z'$ et $y_2' \xrightarrow{*} z'$. Par hypothèse, il existe alors z'' tel que $y_1 \xrightarrow{*} z''$ et $z' \xrightarrow{*} z''$; puis z tel que $z'' \xrightarrow{*} z$ et $y_2 \xrightarrow{*} z$. $P(x)$ est bien démontré.

$$\begin{tikzcd}
 & & y_1 \arrow[dr, dashed, "*"] & & \\
 & y'_1 \arrow[ur, "*"] \arrow[dr, dashed, "*"] & & z'' \arrow[dr, dashed, "*"] & \\
x \arrow[ur] \arrow[dr] & & z' \arrow[ur, dashed, "*"] & & z \\
 & y'_2 \arrow[ur, dashed, "*"] \arrow[dr, "*"] & & & \\
 & & y_2 \arrow[uurr, dashed, "*"] & &
\end{tikzcd}$$

Ce résultat montre que $P(x)$ est vérifiée pour tout x car s'il existe un x_0 ne vérifiant pas $P(x_0)$, on peut trouver un x_1 ne vérifiant pas $P(x_1)$ et tel que $x_0 \xrightarrow{+} x_1$ puis un x_2 ne vérifiant pas $P(x_2)$ et tel que $x_1 \xrightarrow{+} x_2$ et ainsi de suite; on contredit ainsi la terminaison.

4. Conséquence de la question 2.

5. Contre-exemple: $\mathcal{X} = \{y, z, x_0, x_1, x_2, \dots\}$, $x_0 \to x_1 \to x_2 \to \cdots$, $x_{2n} \to y$ et $x_{2n+1} \to z$.