Fractions égyptiennes (ENS Lyon, Maths-Info)

Les égyptiens, pour représenter une fraction, n'utilisaient que des sommes d'inverses d'entiers tous distincts. Par exemple, $\frac{5}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$.

Décomposer $\frac{10}{13}$. *Cette décomposition est-elle unique?*

Montrer que, pour $r \in]0,1[\cap \mathbf{Q}$, *une telle écriture est toujours possible.*

Proposer un algorithme décomposant $\frac{a}{b}$ *avec* $0 < a < b$.

Cas où $r \geqslant 1$.

Corrigé

On propose trois méthodes de calcul d'un développement égyptien de $r \in]0,1[\cap \mathbf{Q}$.

1. La première méthode consiste à faire évoluer un *développement partiel* de r, c.-à-d. une suite croissante $D = (x_1, \ldots, x_m)$ d'entiers telle que

$$r = \frac{1}{x_1} + \cdots + \frac{1}{x_m}.$$

Au départ, si $r = \frac{a}{b}$ où $0 < a < b$, on pose

$$D = (\underbrace{b, \ldots, b}_{a}).$$

Le développement $D = (x_1, \ldots, x_m)$ est égyptien si ses éléments sont tous distincts. Tant que ce n'est pas le cas, on choisit k tel que $x_k = x_{k+1}$ et

– si x_k est pair, on remplace x_k par $\frac{x_k}{2}$ et on supprime x_{k+1};

– si $y = x_k$ est impair, on utilise l'identité

$$\frac{2}{y} = \frac{1}{(y+1)/2} + \frac{1}{y(y+1)/2},$$

autrement dit, on supprime de D x_k et x_{k+1} et on les remplace par $(y+1)/2$ et $y(y+1)/2$.

Si on munit l'ensemble des suites finies d'entiers naturels de l'ordre lexicographique, poids fort en tête, le développement D diminue strictement à chaque étape. Cela prouve l'arrêt de l'algorithme.

Avec cette méthode, on obtient

$$\frac{10}{13} = \frac{1}{2} + \frac{1}{7} + \frac{1}{14} + \frac{1}{23} + \frac{1}{91} + \frac{1}{2093}.$$

2. La deuxième méthode de développement de $r = \frac{a}{b}$ est un algorithme glouton dû à Fibonacci.

Si $r = 0$, c'est fini. Sinon, on pose $p = \left\lceil \frac{1}{r} \right\rceil$, de sorte que $\frac{1}{p}$ est maximum vérifiant $\frac{1}{p} \leqslant r$. On continue ensuite avec $r' = r - \frac{1}{p}$.

On montre que les dénominateurs p obtenus forment une suite strictement croissante: Si $r' \neq 0$, en notant $p' = \left\lceil \frac{1}{r'} \right\rceil$, il vient $\frac{1}{p'} \leqslant r - \frac{1}{p} < \frac{1}{p-1} - \frac{1}{p}$; d'où $p' > p(p-1) \geqslant p$.

Pour montrer la terminaison, il suffit de remarquer que le numérateur de $r' = \dfrac{ap-b}{pb}$ est $<$ à celui de $r = \dfrac{a}{b}$, ce qui se déduit de l'inégalité $\dfrac{a}{b} < \dfrac{1}{p-1}$.

On obtient par exemple
$$\frac{10}{13} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{52}.$$

3. Pour la troisième méthode, si a et b sont premiers entre eux, il existe $b' \in [|0, b-1|]$ vérifiant $ab' \equiv 1 \mod b$ puis a' tel que $ab' = 1 + a'b$. Alors $\dfrac{a}{b} = \dfrac{1}{bb'} + \dfrac{a'}{b'}$ et on continue.

Les dénominateurs bb' obtenus forment une suite strictement décroissante car $b'' < b' < b$ donc $b'b'' < bb'$.

Enfin la méthode termine car car $b' < b$.

Par exemple
$$\frac{10}{13} = \frac{1}{52} + \frac{1}{12} + \frac{1}{6} + \frac{1}{2}.$$

4. Montrons que tout $r \in \mathbf{Q}_+^*$ est développable en fractions égyptiennes. Comme la série harmonique diverge, il existe un entier n vérifiant
$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leqslant r \text{ et } \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k} > r.$$
Ainsi
$$r = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} + r' \text{ avec } 0 \leqslant r' < \frac{1}{n+1}.$$
Les dénominateurs d'un développement de r' en fractions égyptiennes sont donc $> n+1$ et on obtient ainsi un développement de r.