Exercice 1.

1) Soit $M = (m_{i,j})_{(i,j)\in[1,n]^2}$ une matrice d'entiers.
On appelle escalier toute suite de cases (i,j) adjacentes (par les côtés) croissante (c'est à dire telle que $m_{i_k,j_k} < m_{i_{k+1},j_{k+1}}$).
Trouver un procédé algorithmique pour trouver le plus long escalier.

2) Trouver un algorithme en $\bigcirc(n^2)$ si on ajoute comme condition que les suites (i_p) et (j_p) sont croissantes.

Solutions

Exercice 1.

1) On définit une suite (finie) de matrice carrées d'ordre n à valeur dans $\{0,1\}$:
A_1 a tous ses coefficients égaux à 1.
$(A_{p+1})_{i,j}$ est égal à 1 si et seulement si $(A_p)_{i,j}$ a un voisin valant 1 et tel que $m_{i',j'} < m_{i,j}$. (alors $m_{i,j}$ est l'extrémité d'un escalier de longueur p) Dès que $A_k = 0$, $k-1$ est la longueur du plus long escalier. En remontant les matrices de la construction on peut alors expliciter un (les) escaliers de longueur $k-1$
La complexité est en $\bigcirc(n^4)$ (l'escalier a une longueur au plus n^2)

2) On construit une matrice ligne par ligne. On pose $a_{1,1} = 1$ puis, pour tout j, $a_{1,j} = 1 + a_{1,j-1}$ si $m_{1,j} > m_{1,j-1}$ et 1 sinon. Puis pour la ligne i :
Si $m_{i,j} > m_{i-1,j}$ ou $m_{i,j} > m_{i,j-1}$, on pose $a_{i,j} = \max(1 + m_{i-1,j}, 1 + m_{i,j-1})$, $a_{i,j} = 1$ sinon (on ne s'occupe que de $m_{i-1,1}$ si $j = 1$). Le coefficient maximum de la matrice finale indique la longueur du plus grand escalier. On lit peut alors le remonter sur la matrice A.