

ENS  
Xavier Moch

*Informatique :*

Pas à dire, Cachan est un lieu sympa, pour ce que j'en ai vu entre le RER et l'école. Le site même l'est moins au niveau architectural, mais le parc est beau. C'est donc dans cet esprit que, étant en avance, j'ouvre mon oraux'scope 1/4H avant l'épreuve, pour m'apercevoir que le coefficient de l'informatique est de 12/27 (c'est tout bonnement le plus élevé, le suivant est celui des maths : 8). Et pourtant, je suis inscrit en Maths-Info, alors ça ne doit pas être triste pour ceux inscrits en Info !

On appelle langage  $L$  local sur un alphabet  $A$  un langage

$$L = (X.A^* \cap A^*.Y) - A^*VA^*$$

(le "moins" est pour "privé de"), où  $X \subset A$ ,  $Y \subset A$ ,  $V \subset A^2$

Prouver qu'un tel langage est reconnaissable.

J'ai bien évidemment fait le mariole et ai demandé si  $A$  était fini. Comme c'était le cas, je lui ai dit "c'est presque les théorèmes généraux", alors je lui ai construit un automate reconnaissant  $X.A^*$ , ai dit "idem pour  $A^*.Y$ , dans l'autre sens", ai un peu galéré pour reconnaître  $A^*VA^*$  à cause des notations (en fait,  $V$  est ensemble de mots sur  $A$  constitué de deux lettres, ce n'est pas terrible pour schématiser proprement l'automate). Puis je lui ai dit "intersection - complémentaire - intersection", et j'ai découvert... la question 2 !

Trouver un langage reconnaissable non-local

Je ne sais pas s'il y a encore des gens pour se rappeler qu'à mon époque taupine, j'étais l'as des cas particuliers (c'est surtout ceux qui m'ont connu en 3/2 qui doivent le savoir). Alors j'ai proposé  $A^*$ , en disant que  $\epsilon \notin L$  (ses mots ont tous au moins une lettre). Elle m'a dit que c'était un peu particulier, et m'a demandé de trouver autre chose. Panne d'inspiration. Alors elle me dit d'essayer  $(ab)^*(ac)^*$  sur  $A = a; b; c$ . C'est clairement reconnaissable (je lui ai fait un petit automate à 5 états en lui disant qu'on pouvait, bien évidemment, le rendre déterministe complet si l'on préférait).

Puis on raisonne par conditions nécessaires : si  $L = (X.A^* \cap A^*.Y) - A^*VA^*$ , alors  $X = \{a\}$ ,  $Y = \{c\}$ , et comme les sessions  $ab$ ,  $ba$ ,  $ac$ ,  $ca$  seules peuvent apparaître, on pose  $V = \{aa; bb; cc; bc; cb\}$  (et on vérifie que le total fait bien  $3^2$ , c'est comme ça que j'ai trouvé qu'il m'en manquait une). Mais là, gros problème : le mot  $ac$  (par exemple) est dans  $(X.A^* \cap A^*.Y) - A^*VA^*$  mais n'est pas dans  $L$  ! On a notre contre-exemple, et on y gagne... le libellé de la question 3 !

Prouver qu'un langage local sur  $A$  (langage de cardinal  $n$ ) peut être reconnu par un automate à  $n + 2$  états déterministe complet.

Heureusement, l'examinatrice n'est pas muette. Ne sachant pas par où commencer, je dis tout haut : comme il faut qu'il soit déterministe et complet, il me faut forcément un état rebut ( $r$ ). J'ai de toute façon besoin d'un état initial ( $i$ ). Il me reste donc  $n$  états (appelés par la suite  $q_p$ ), et comme j'ai  $n$  lettres... Elle m'a dit de me lancer. En appelant  $a_p$  les  $n$  lettres du langage, je pose donc la fonction de transition  $\delta(i, a_p) = q_p$  si  $a_p \in X$ ,  $\delta(i, a_p) = r$  sinon (mes mots commencent donc par une lettre de  $X$ ). Je finalise l'état  $q_p$  ssi  $a_p \in Y$  (mes mots se terminent par une lettre de  $Y$ ). Reste à enlever les sessions de deux lettres :  $\delta(q_p, a_{p'}) = r$  si  $a_p a_{p'} \in V$ ,  $\delta(q_p, a_{p'}) = q_{p'}$  sinon. Et voilà l'automate, pas si compliqué, après tout ! On se motive donc, et... en avant pour la question 4 !

Montrer que si  $R$  est reconnaissable sur  $A$ , il existe un alphabet  $B$ , un langage  $L \subset B^*$  local, et un morphisme  $\varphi$  tel que  $\varphi(L) = R$

Bon, ça sent la question à points. Ne pas se laisser intimider. Comme je manque d'idée, je lui dis que ma seule hypothèse "utilisable" est que  $R$  soit reconnaissable, et j'appelle  $\mathcal{A}$  un automate reconnaissant  $R$ . Elle me donne dès lors une indication : poser  $B = Q \times A \times Q$  où  $Q$  représente les états de  $\mathcal{A}$  (je pose pour la suite :  $\mathcal{A} = (Q, A, I, F, \delta)$ ).

Réfléchissons : quand on lit un mot dans  $R$ , on part des états initiaux, et on lit une première lettre. Alors je pose  $X = \{(q, a_i, q'), q \in I\}$  ; de manière identique,  $Y = \{(q, a_i, q'), q' \in F\}$ . De plus, pour les mots de deux lettres, je veux qu'on reparte de l'état auquel on est arrivé, ce qui impose  $V = \{(q_1, a_i, q'_1)(q_2, a_j, q'_2)\}$ ,  $q'_1 \neq q_2$ . Dans ce cas, un mot  $m$  de  $L$  est de type  $(i, a_1, q_1)(q_1, a_2, q_2) \dots (q_{p-1}, a_p, q_p)$ . Je pose donc  $\varphi((q, a_i, q')) = a_i$ , et je définis le morphisme de monoïde par  $\varphi((q, a_i, q').m) = a_i \cdot \varphi(m)$  (j'ai un peu bafouillé sur ce qu'était un morphisme, le temps qu'elle me recadre les idées et ça allait mieux). On a bien  $\varphi(L) = R$  (trivial en considérant le parcours dans  $\mathcal{A}$ ). Et c'est ainsi que mon temps fut écoulé.

Note : 15