Inf 431 – Cours 2

Dags – Connexité 1

jeanjacqueslevy.net

secrétariat de l'enseignement:
Catherine Bensoussan
cb@lix.polytechnique.fr
Aile 00, LIX,
01 69 33 34 67

www.enseignement.polytechnique.fr/informatique/IF

Délégués

1. Deux délégués pour IF 431
2. Délégués PC/TD

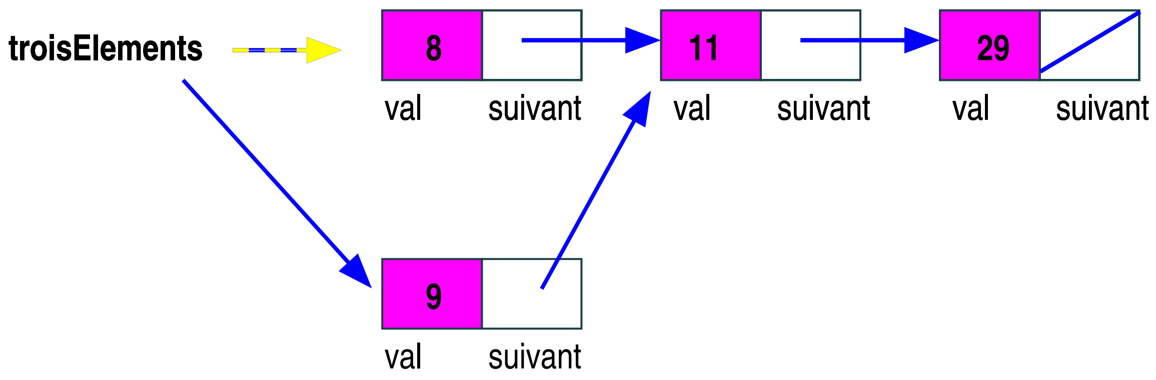
Plan

1. Arbres de recouvrement
2. Détection de cycles
3. Tri topologique
4. Composantes connexes
5. Bi-connexité et points d'articulation

Rappel sur les listes

Listes d'entiers

```
class Liste {
  int val; Liste suivant;
  Liste (int x, Liste s) { val = x; suivant = s; }
}

class X {
  static Liste listeVide = null;

  public static void main (String[ ] args) {
    Liste troisElements =
          new Liste(8, new Liste(2, new Liste(29, null)));
    troisElements.suivant.val = 11;
    System.out.println (troisElements.suivant.suivant.val);
    troisElements = new Liste (9, troisElements.suivant);
} }
```



Parcours en profondeur (1/2)

```
final static int BLANC = 0, GRIS = 1, NOIR = 2;
static numOrdre;

static void visiter (Graphe g) {
  int n = g.succ.length; int[ ] couleur = new int[n]; numOrdre = -1;
  for (int x = 0; x < n; ++x) num[x] = -1;
  for (int x = 0; x < n; ++x) couleur[x] = BLANC;
  for (int x = 0; x < n; ++x)
    if (couleur[x] == BLANC)
      dfs(g, x, couleur, num);
}

static void dfs (Graphe g, int x, int[ ] couleur, int[ ] num) {
  couleur[x] = GRIS;
  num[x] = ++numOrdre;
  Pour tout y successeur de x dans G
  faire {
    if (couleur[y] == BLANC)
      dfs(g, y, couleur, num);
  }
  couleur[x] = NOIR;
}
```

Parcours en profondeur (2/2)

```
final static int BLANC = 0, GRIS = 1, NOIR = 2;
static numOrdre;

static void visiter (Graphe g) {
  int n = g.succ.length; int[ ] couleur = new int[n]; numOrdre = -1;
  for (int x = 0; x < n; ++x) num[x] = -1;
  for (int x = 0; x < n; ++x) couleur[x] = BLANC;
  for (int x = 0; x < n; ++x)
    if (couleur[x] == BLANC)
      dfs(g, x, couleur, num);
}

static void dfs (Graphe g, int x, int[ ] couleur, int[ ] num) {
  couleur[x] = GRIS;
  num[x] = ++numOrdre;
  for (Liste ls = g.succ[x]; ls != null; ls = ls.suivant) {
    int y = ls.val;
    if (couleur[y] == BLANC)
      dfs(g, y, couleur, num);
  }
  couleur[x] = NOIR;
}
```

Sortie de labyrinthe

On cherche un chemin de x à s. Exécution

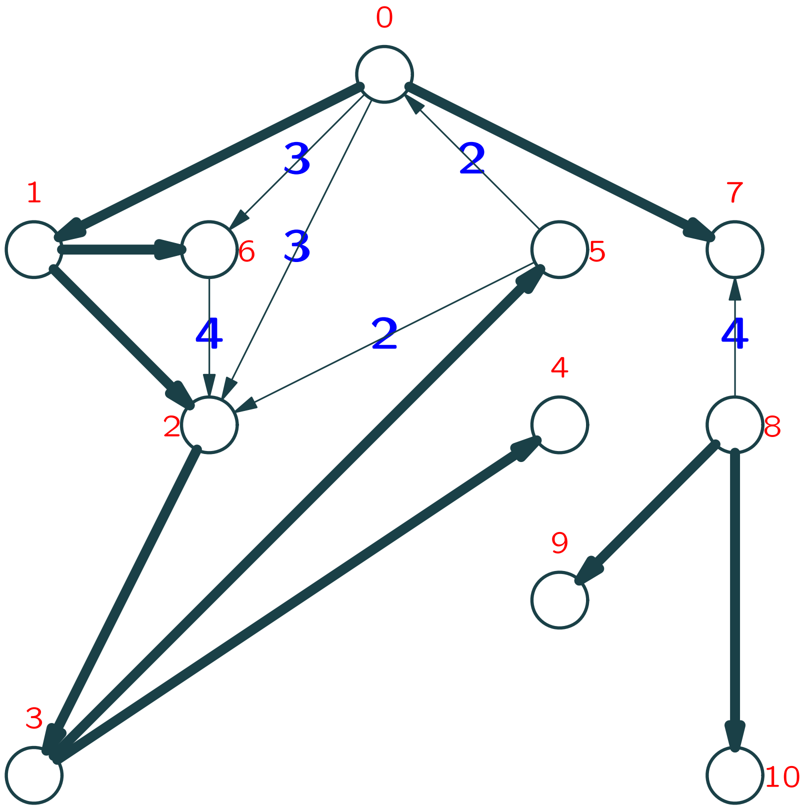
```
static Liste chemin (Graphe g, int x, int s, int[ ] couleur) {
  couleur[x] = GRIS;
  if (x == s)
    return new Liste (x, null);
  for (Liste ls = g.succ[x]; ls != null; ls = ls.suivant) {
    int y = ls.val;
    if (couleur[y] == BLANC) {
      Liste r = chemin (g, y, s);
      if (r != null)
        return new Liste (x, r);
    }
  }
  return null;
}
```

- `chemin` retourne la liste des sommets sur le chemin trouvé vers la sortie s.
- $\Rightarrow$ Ne pas oublier que la fonction `dfs` peut retourner un résultat.
- Complexité en temps en $O(V + E)$

Arbres de recouvrement (1/4)

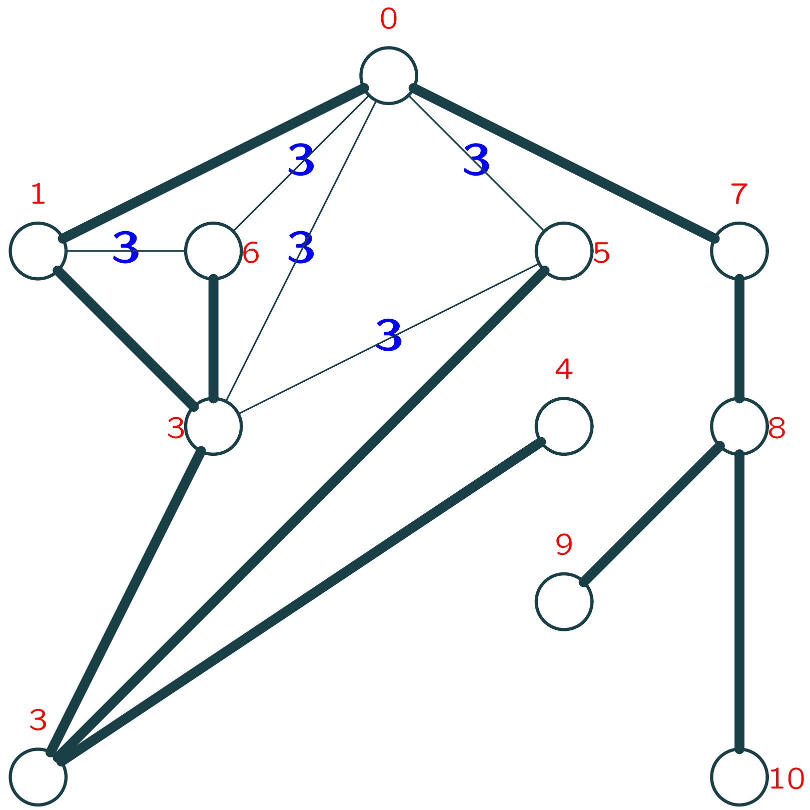
4 sortes d'arcs par rapport aux branches d'un arbre de recouvrement :

1. d'un nœud de l'arbre à un fils dans l'arbre
2. d'un nœud de l'arbre à un ancètre dans l'arbre
3. d'un nœud de l'arbre à un descendant non direct dans l'arbre
4. d'un nœud à un cousin dans l'arbre (forêt)



Arbres de recouvrement (2/4)

Mais, dans un graphe non-orienté, deux sortes d'arcs dans `dfs` :



Rappel : Dans notre représentation des graphes non-orientés, un arc coexiste avec son arc inverse ; donc les cas 1-2, 3-2 coexistent.

Graphe non-orienté ⇒ pas d'arcs de type 4 ≡ pas d'arcs transverses.

Arbres de recouvrement (3/4)

$d(x)$ est le temps où x devient `GRIS` dans `dfs`
$f(x)$ est le temps où x devient `NOIR` dans `dfs`

Proposition 1 [Intervalles parenthésés] Soient s et t deux sommets.
Alors 3 cas seulement :

- les intervalles $[d(s), f(s)]$ et $[d(t), f(t)]$ sont disjoints et s et t sont cousins dans l'arbre de recouvrement ;
- l'intervalle $[d(s), f(s)]$ contient $[d(t), f(t)]$ et s admet t comme descendant dans l'arbre de recouvrement ;
- l'intervalle $[d(s), f(s)]$ est contenu dans $[d(t), f(t)]$ et s admet t comme ancêtre dans l'arbre de recouvrement ;

Proposition 2 [Caractérisation par numéros] Soit e un arc de s à t.
Alors :

- e est de type 1 ou 3 ssi $num[s] < num[t]$.
- e est de type 2 ou 4 ssi $num[s] > num[t]$.

Arbres de recouvrement (4/4)

Soit $d(e)$ le temps où on considère l'arc e pour la première fois dans `dfs`.

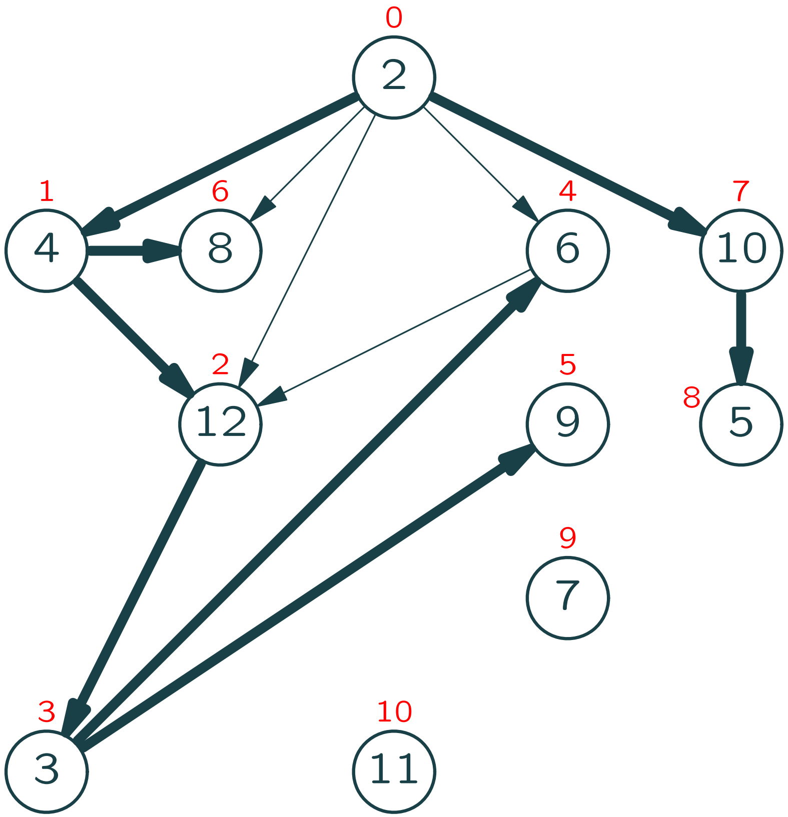
Proposition 3 [Caractérisation par couleurs] Soit e un arc de s à t.
Alors :

- e est de type 1 ssi $couleur[t] =$ `BLANC` au temps $d(e)$.
- e est de type 2 ssi $couleur[t] =$ `GRIS` au temps $d(e)$.
- e est de type 3 ou 4 ssi $couleur[t] =$ `NOIR` au temps $d(e)$.

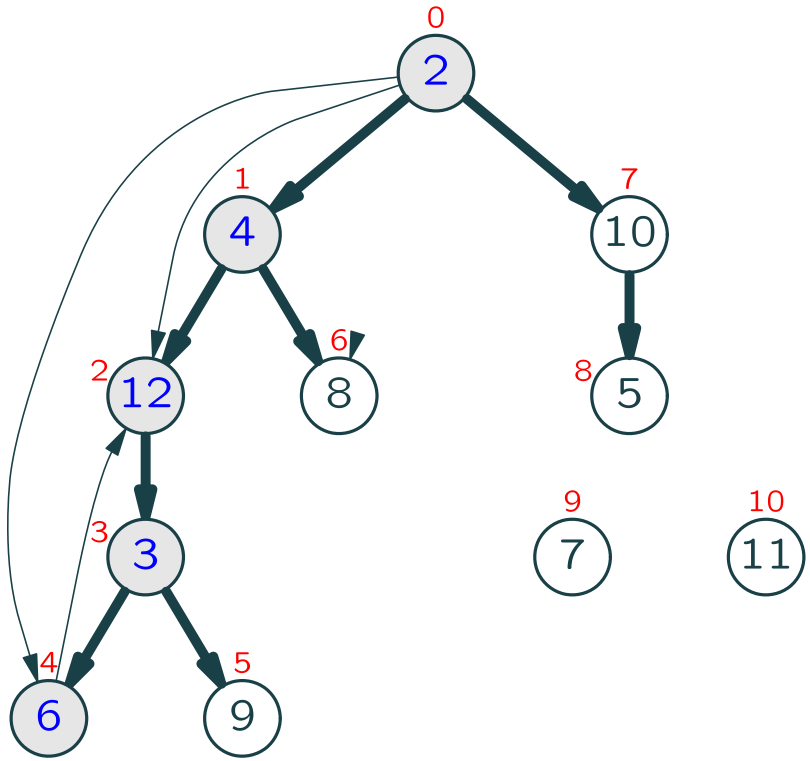
Un chemin blanc est un chemin dont tous les sommets intermédiaires sont `BLANC`s.

Proposition 4 [Chemins blancs] Le sommet t est un descendant de s dans un arbre de recouvrement ssi il existe un chemin blanc de s `GRIS` vers t `BLANC` lors de l'exploration de s par le `dfs` correspondant.

Détection de cycles (1/3)



graphe avec cycle



arbre de recouvrement

Cycle ss'il existe un arc de type 2 pendant la construction de l'arbre de recouvrement.

Détection de cycles (2/3)

Définition 5 Le point d'attache d'un cycle est le premier sommet du cycle visité par `dfs`.

$\Rightarrow$ Le point d'attache est le sommet s du cycle dont $num[s]$ est minimal.

Proposition 6 Le graphe est cyclique ss'il existe un arc e vers un sommet `GRIS` au temps $d(e)$.

Démonstration

1. S'il existe un arc e de s à t `GRIS` au temps $d(e)$, alors e est un arc de type 2. Il existe un cyle de t passant par s et revenant à t.
2. S'il existe un cycle de point d'attache t, au début de l'exploration du cycle le sommet t est `GRIS`, les autres sont `BLANC`s dans le cycle. Il existe un chemin blanc de t au prédécesseur t' de t dans le cycle. Donc t' est un descendant de t dans l'arbre de recouvrement. Et il existe un arc e de t' à t `GRIS` au temps $d(e)$.

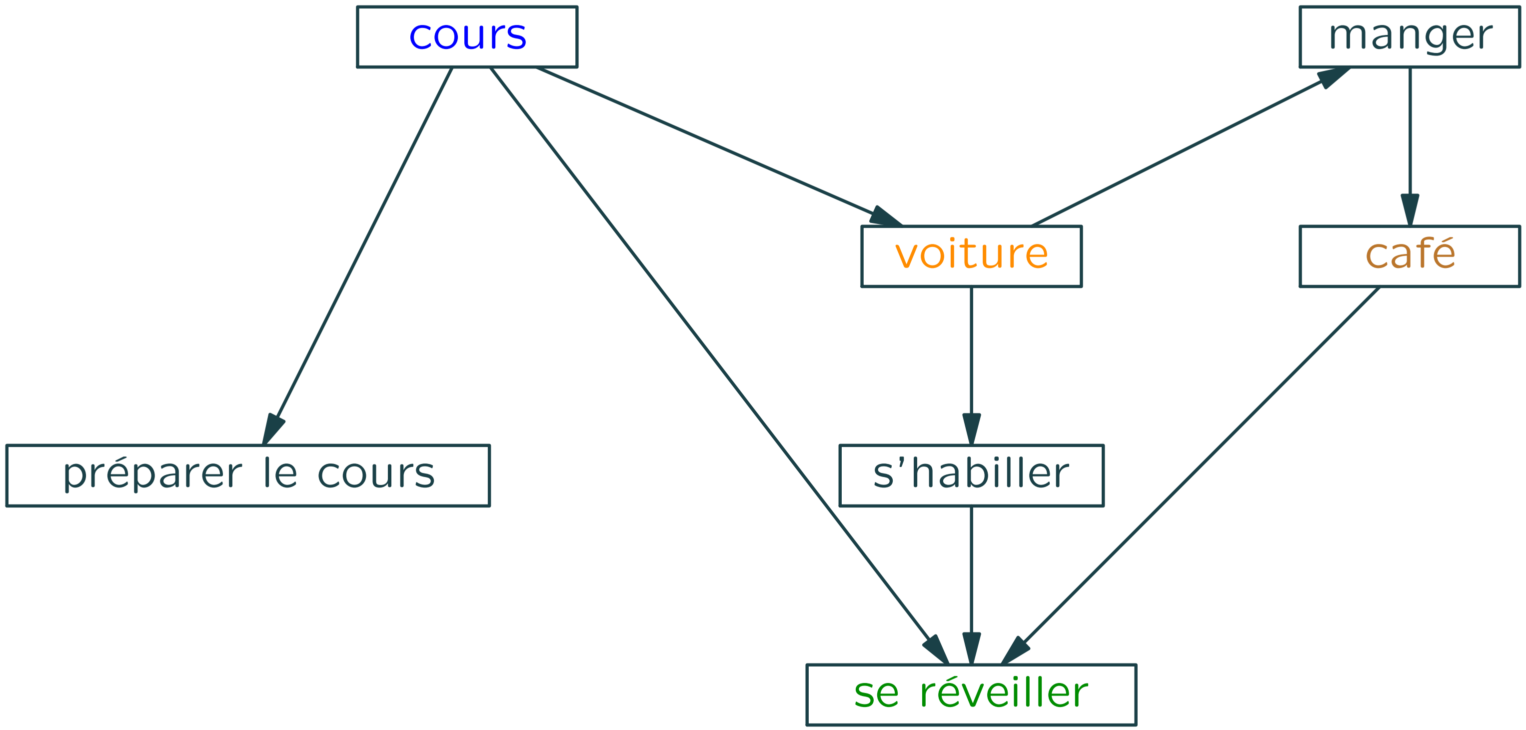
Détection de cycles (3/3)

```
final static int BLANC = 0, GRIS = 1, NOIR = 2;

static boolean acyclique (Graphe g) {
  int n = g.succ.length; int[ ] couleur = new int[n];
  for (int x=0; x < n; ++x) couleur[x] = BLANC;
  for (int x=0; x < n; ++x)
    if ( couleur[x] == BLANC && cycleEn(g, x, couleur) )
      return false;
  return true;
}

static boolean cycleEn(Graphe g, int x, int[ ] couleur) {
  couleur[x] = GRIS;
  for (Liste ls = g.succ[x]; ls != null; ls = ls.suivant) {
    int y = ls.val;
    if ( couleur[y] == GRIS
      || couleur[y] == BLANC && cycleEn(g, y, couleur) )
      return true;
  }
  couleur[x] = NOIR;
  return false;
}
```

Tri topologique (1/4)

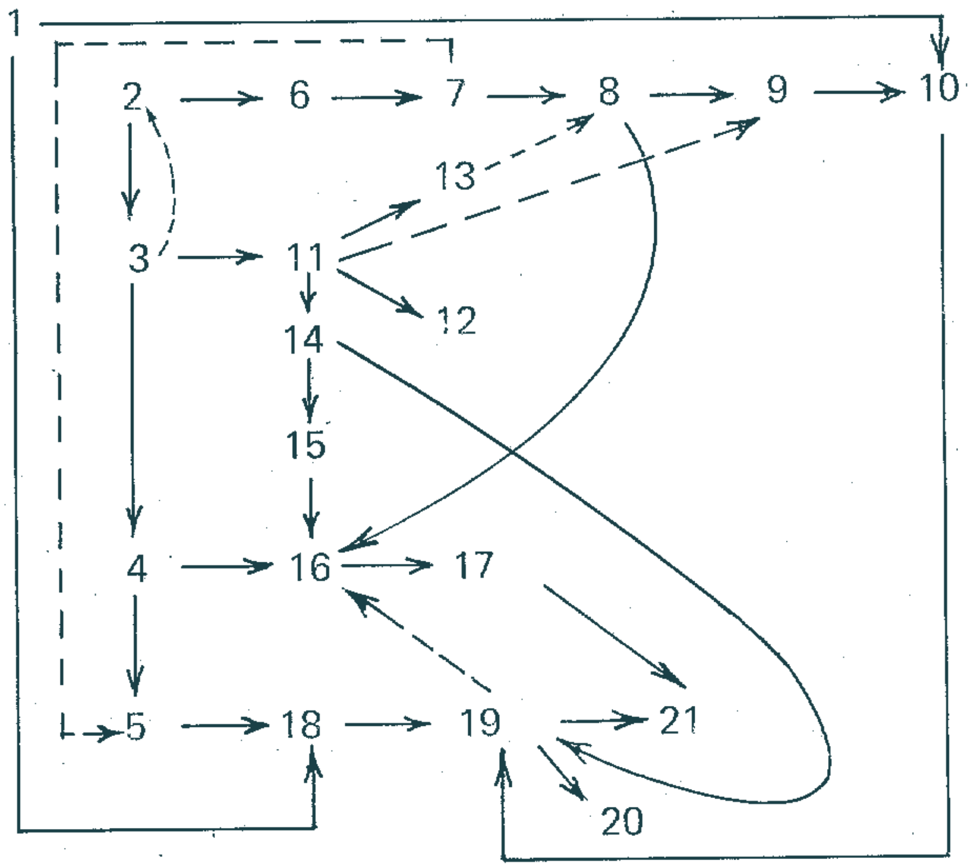
$G = (V, E)$ est un graphe acyclique (dag : *directed acyclic graph*)

Donner une liste des sommets $\langle v_i \mid i = 1..n \rangle$ dans un ordre compatible avec l'ordre induit par G : $v_i < v_j \Leftrightarrow v_j \rightarrow v_i$.



(trouver un ordre total compatible avec un ordre partiel donné)

Tri topologique (2/4)



Ordre de lecture
des chapîtres
du livre de
H. P. Barendregt
The λ-calculus :
its syntax and semantics
North-Holland, 1980

Autre exemple : trouver l'ordre d'exécution des tâches d'un projet à partir du graphe de dépendances (ordonnancement).

Tri topologique (3/4)

Si le sommet terminal est connu, un parcours en profondeur suffit.

```
final static int BLANC = 0, GRIS = 1, NOIR = 2;

static Liste aFaire (Graphe g, int x) {
  int n = g.succ.length;
  int[ ] couleur = new int[n];
  for (int x = 0; x < n; ++x) couleur[x] = BLANC;
  return dfs(g, x, null, couleur);
}

static Liste dfs(Graphe g, int x, Liste r, int[ ] couleur) {
  couleur[x] = GRIS;
  for (Liste ls = g.succ[x]; ls != null; ls = ls.suivant) {
    int y = ls.val;
    if (couleur[y] == BLANC)
      r = dfs(g, y, r, couleur);
  }
  return new Liste (x, r);
}
```

r est un accumulateur pour le résultat $\equiv$ liste des sommets à faire.

Tri topologique (4/4)

Pour trouver les sommets terminaux (dont aucun autre ne dépend), un parcours linéaire des arcs suffit.

```
static boolean[ ] calculerTerminaux (Graphe g) {
  int n = g.succ.length;
  int[ ] terminal = new boolean[n];
  for (int x = 0; x < n; ++x) terminal[x] = true;
  for (int x = 0; x < n; ++x)
    for (Liste ls = g.succ[x]; ls != null; ls = ls.suivant) {
      int y = ls.val;
      terminal[y] = false;
    }
  return terminal;
}
```

Complexité en $O(V + E)$.

Autre algorithme [Knuth] sur le graphe inverse.

Connexité

- Existe-t'il un chemin entre deux sommets ?
  (dfs ; cf. sortie de labyrinthe). Complexité $O(V+E)$.

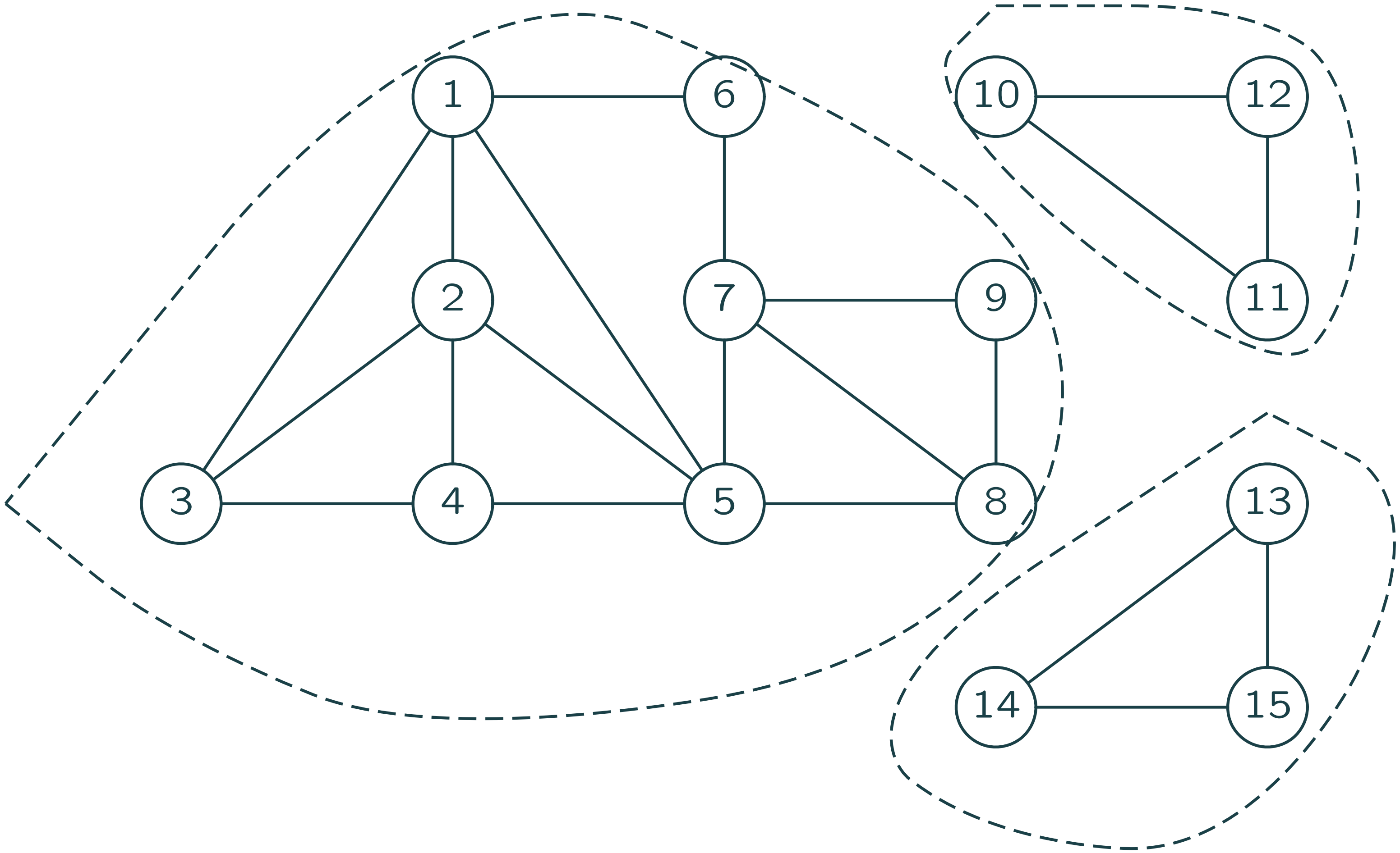
- Trouver l'ensemble des sommets accessibles depuis un sommet.
  (dfs). Complexité $O(V+E)$.

- Trouver les ensembles de sommets interconnectés dans un graphe non-orienté. Composantes connexes.
  (cf. plus loin ; dfs) Complexité $O(V+E)$.

- Même problème dans un graphe orienté ? Composantes fortement connexes. (cf. plus loin ; dfs) Complexité $O(V+E)$.

Composantes connexes (1/2)

Le graphe est non-orienté.



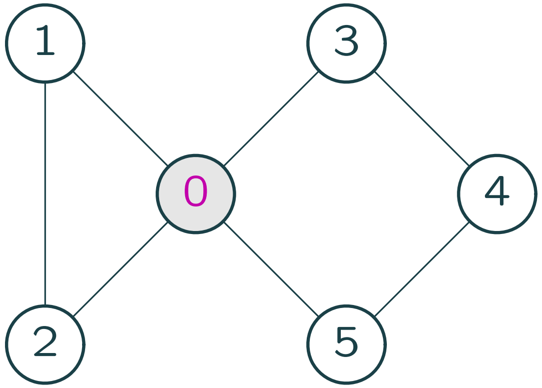
Composantes connexes (2/2)

```
static void imprimerCompConnexes (Graphe g) {
  int n = g.succ.length;
  int[ ] couleur = new int[n];
  for (int x = 0; x < n; ++x) couleur[x] = BLANC;
  for (int x = 0; x < n; ++x) {
    if (couleur[y] == BLANC) {
      imprimerComposanteDe(g, x, couleur);
      System.out.println();
} } }

static void imprimerComposanteDe(Graphe g, int x, int[ ] couleur) {
  couleur[x] = GRIS;
  System.out.print (x + " ");
  for (Liste ls = g.succ[x]; ls != null; ls = ls.suivant) {
    int y = ls.val;
    if (couleur[y] == BLANC)
      imprimerComposanteDe(g, y, couleur);
} }
```

Exercice 1 Ecrire une fonction qui rend la liste des composantes connexes.

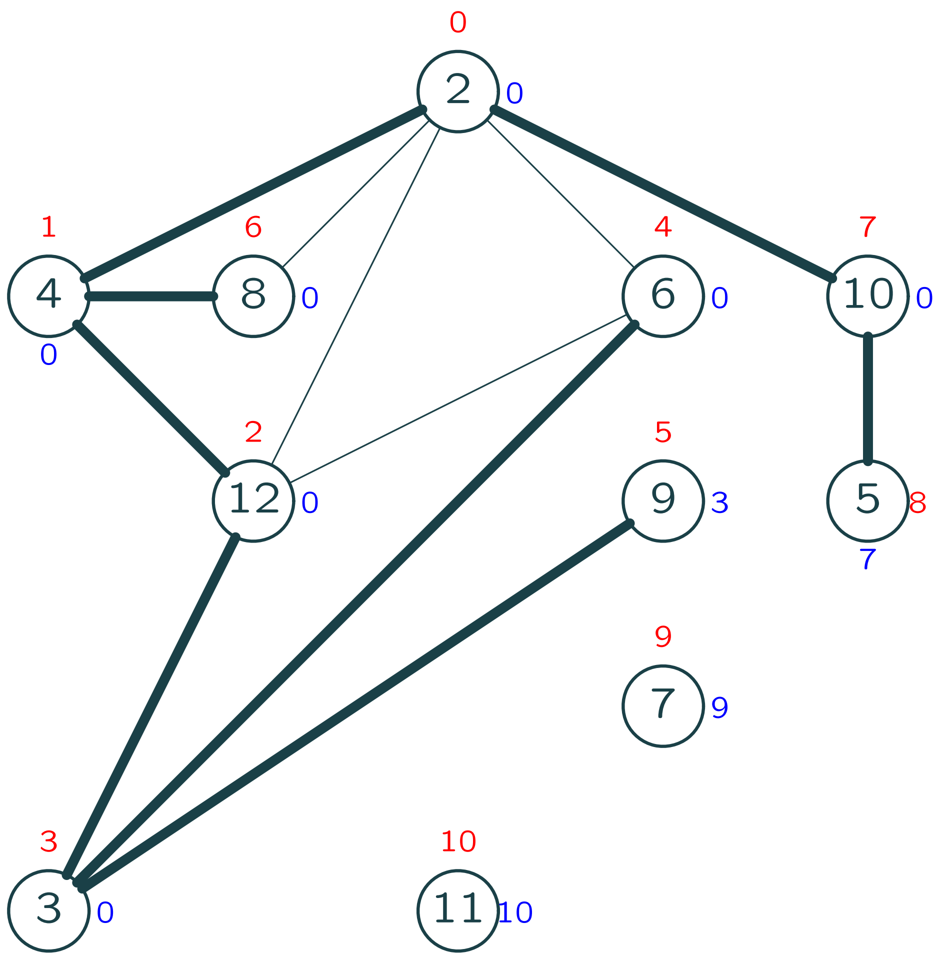
Bi-connexité (1/8)

- Dans un graphe non-orienté, existe-t-il 2 chemins différents entre toute paire de nœuds ?
- Un point d'articulation est un point qui sépare le graphe en parties non connexes si on l'enlève.



- Un graphe connexe sans point d'articulation est bi-connexe.
- Exemples : les rues de Paris, la distribution d'électricité, la topologie d'un réseau informatique, etc. Il vaut mieux que ces graphes soient bi-connexes.

Bi-connexité (2/8)



Le point d'attache de x est le sommet t avec le plus petit $num[t]$ tel qu'un chemin relie x à t avec au plus un seul arc de retour.

Bi-connexité (3/8)

Définition 7 Un circuit est un chemin formé par les arcs e_1, e_2, $\ldots e_n$ $(n \geq 0)$ tels que :

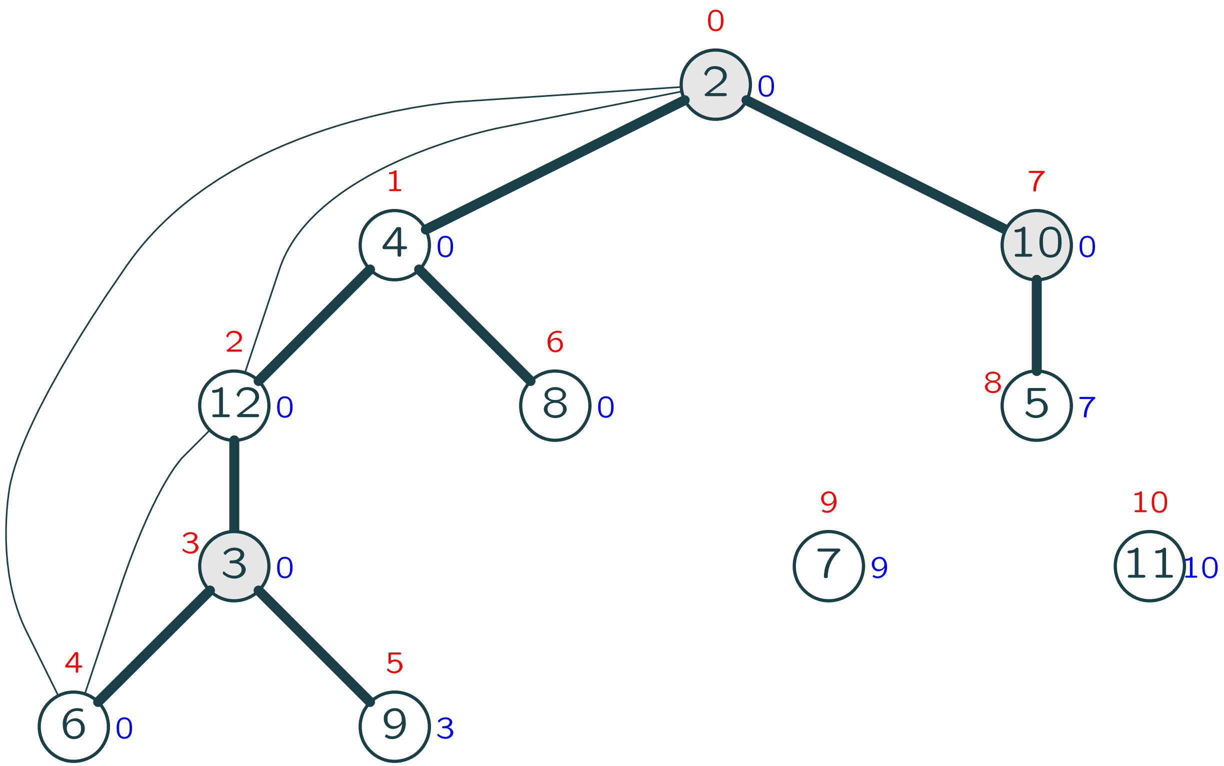
- $ext(e_i) = org(e_{i+1})$ pour $1 \leq i < n$
- $ext(e_n) = org(e_1)$

Définition 8 Un circuit élémentaire est un chemin dont tous les sommets sont distincts (à l'exception du premier et du dernier).

Proposition 9 Le point d'attache de x est le point d'attache t de numéro $num[t]$ minimum parmi tous les circuits élémentaires passant par x.

Bi-connexité (4/8)

Vue de l'arbre de recouvrement



Un point d'articulation x a un descendant direct y dont le point d'attache t vérifie $num[x] \geq num[t]$. Par exemple : $x \in \{3, 10, 2\}$

Bi-connexité (5/8)

Calcul (en dfs) du numéro de parcours du point d'attache de x.

```
static int attache(Graphe g, int x) {
  int min = num[x] = ++numOrdre;
  for (Liste ls = g.succ[x]; ls != null; ls = ls.suivant) {
    int y = ls.val; int m;
    if (num[y] == -1) {
      m = attache(g, y);
      if (m >= num[x])
        articulation[x] = true;
    } else
      m = num[y];
    min = Math.min (min, m);
  }
  return min;
}
```

Bi-connexité (6/8)

Avec le critère précédent, tout sommet à la racine de l'arbre de recouvrement serait un point d'articulation.

Correction : le sommet à la racine de l'arbre de recouvrement est un point d'articulation ssi ce sommet a plus qu'un fils dans l'arbre.

```
static int numOrdre; static int[ ] num;
static boolean[ ] articulation;

static void trouverArticulations (Graphe g) {
  int n = g.succ.length; num = new int[n]; numOrdre = -1;
  articulation = new boolean[n];
  for (int x = 0; x < n; ++x) { num[x] = -1; articulation[x] = false; }
  for (int x = 0; x < n; ++x)
    if (num[x] == -1) {
      attache1(g, x);
    }
}
```

Bi-connexité (7/8)

```
static void attache1(Graphe g, int x) {
  num[x] = ++numOrdre;
  int nfils = 0;
  for (Liste ls = g.succ[x]; ls != null; ls = ls.suivant) {
    int y = ls.val;
    if (num[y] == -1) {
      ++nfils;
      attache(g, y);
    }
  }
  articulation[x] = nfils > 1;
}
```

On peut déplier cette fonction (*inlining*) dans *trouverArticulations*.

Bi-connexité (8/8)

```
static void trouverArticulations (Graphe g) {
  int n = g.succ.length;
  numOrdre = -1; num = new int[n];
  articulation = new boolean[n];
  for (int x = 0; x < n; ++x) { num[x] = -1; articulation[x] = false; }
  for (int x = 0; x < n; ++x)
    if (num[x] == -1) {
      num[x] = ++numOrdre;
      int nfils = 0;
      for (Liste ls = g.succ[x]; ls != null; ls = ls.suivant) {
        int y = ls.val;
        if (num[y] == -1) {
          ++nfils;
          attache(g, y);
        }
      }
      articulation[x] = nfils > 1;
    }
}
```

Complexité en $O(V + E)$.

Exercices

Exercice 2 Ecrire `trouverArticulations` sans variables globales.

Exercice 3 Ecrire un programme qui teste la bi-connexité d'un graphe.

Exercice 4 (difficile) Ecrire un programme qui imprime les composantes bi-connexes.

Exercice 5 Définir la notion de composante tri-connexe.

Exercice 6 La commande *make* du système Unix fait une analyse de dépendances pour reconstruire un projet informatique. Réfléchir à sa programmation. Certaines versions permettent la reconstruction parallèle où plusieurs commandes peuvent s'exécuter en parallèle sur p processeurs. Comment adapter l'analyse de dépendances ?